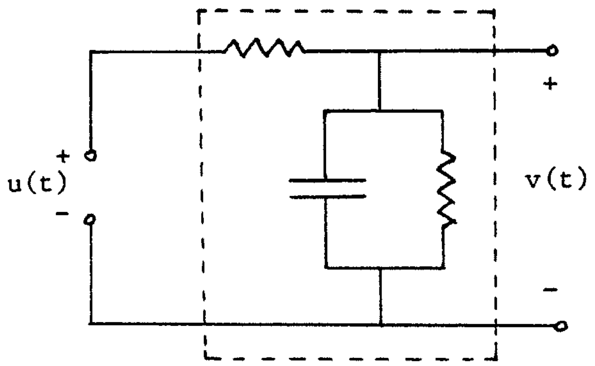
Utdrag ur kompendiet

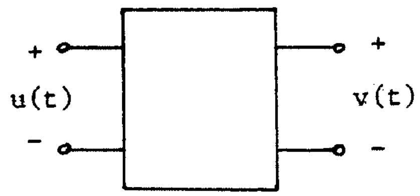
"Tillämpningar av komplex analys och Fourieranalys"

av Kjell Holmåker

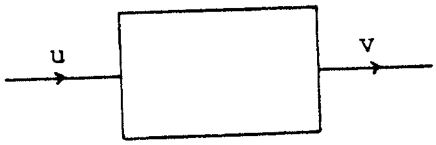
4.2. Linjära system

Ofta står vi inför en problemställning av följande allmänna typ: Någonstans finns en känd spänning eller ström pålagd, och vi är intresserade av den resulterande spänningen eller strömmen någon annanstans i nätet.





Nätet kan uppfattas som en "svart låda" med en ingång och en utgång (se fig.). Tidsfunktionerna $u(t)$ och $v(t)$ kallas för insignal resp. utsignal. Utsignalen är någon sorts funktion av insignalen, och vi åskådliggör det på följande sätt:



Detta betraktelsesätt är ytterst generellt; i det allmänna fallet symboliserar den svarta lådan något slags system, som överför insignaler i utsignaler. Om vi, som ovan, har ett nät bestående av linjära, tidsinvarianta komponenter utan oberoende källor, blir också systemet linjärt och tidsinvariant. Det blir också kausalt beroende på lagen om orsak och verkan. Vi skall strax ge precisa definitioner av dessa begrepp och därefter något närmare studera allmänna, linjära, tidsinvarianta system.

Definition. Ett *linjärt system* S är en linjär avbildning från ett linjärt rum av insignaler till ett linjärt rum av utsignaler. Linjäriteten innebär att

$$S[c_1x_1 + c_2x_2] = c_1S[x_1] + c_2S[x_2].$$

Vi antar också någon form av kontinuitet så att detta kan utsträckas till oändliga summor och integraler:

$$S[\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n S[x_n],$$

$$S[\int_a^b x(\alpha,t)\,d\alpha] = \int_a^b S[x(\alpha,t)]\,d\alpha.$$

Låt $y(t) = S[x(t)]$. Det linjära systemet S är *tidsinvariant* om

$$S[x(t-T)] = y(t-T) \quad \text{för alla} \quad T \in \mathbb{R}.$$

Definition. Systemets utsignal svarande mot insignalen $\delta(t)$ kallas för systemets *impulssvar.*

Sats 4.1. *För ett linjärt, tidsinvariant system S gäller sambandet*

$$S[x] = h * x,$$

där h är systemets impulssvar.

Bevis. Vi kan skriva

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau.$$

Vi har $S[\delta(t)] = h(t)$, och av tidsinvariansen följer att $S[\delta(t-\tau)] = h(t-\tau)$ för alla τ. Linjäriteten ger så

$$\begin{aligned} S[x(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)S[\delta(t-\tau)]\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \\ &= (x*h)(t) = (h*x)(t). \end{aligned}$$

□

Sats 4.2. *Om S är linjärt och tidsinvariant gäller att*

$$S[e^{i\omega t}] = \hat{h}(\omega)e^{i\omega t}$$

för varje $\omega \in \mathbb{R}$, där

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}dt$$

är Fouriertransformen av h.

Bevis. Enligt Sats 4.1 är

$$\begin{aligned} S[e^{i\omega t}] &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}d\tau = e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \\ &= \hat{h}(\omega)e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

□

Om $h(t)$ är reell gäller för $\omega > 0$ att

$$\begin{aligned} S[\cos\omega t] &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,d\tau = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}d\tau \\ &= \mathrm{Re}\,[\hat{h}(\omega)e^{i\omega t}]. \end{aligned}$$

Detta är grunden för $j\omega$-metoden i elektrotekniken.

Genom Fourieruppdelning kan insignalen $x(t)$ framställas som en överlagring av svängningar $e^{i\omega t}$ med varierande vinkelfrekvens ω:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

Analogt för utsignalen:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

Genom Fouriertransformation av sambandet $y = h*x$ fås $\hat{y}(\omega) = \hat{h}(\omega)\hat{x}(\omega)$. Detta visar hur systemet verkar som ett filter, och vi kan direkt avläsa hur de olika frekvenskomponenterna i uppdelningen påverkas.

Definition. Det linjära systemet S kallas *kausalt* om utsignalens värde vid tiden t bara beror på insignalens värden vid tiden $\leq t$.

Sats 4.3. *Antag S linjärt och tidsinvariant med impulssvar h. Då gäller att S är kausalt om och endast om $h(t) = 0$ för $t < 0$.*

Bevis. Antag S kausalt. Tillämpa definitionen av kausalitet på insignalen $\delta(t)$. Eftersom $\delta(t)$ och insignalen 0 för alla t är lika för $t < 0$ följer att $h(t) = 0$ för $t < 0$. Antag omvänt att $h(t) = 0$ för $t < 0$. Enligt Sats 4.1 är då sambandet mellan insignal och utsignal

$$y(t) = (h * x)(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)x(\tau)d\tau,$$

vilket visar att y vid tider t bara beror på $x(\tau)$ för tider $\tau \leq t$. □

Exempel 4.1. Ett *idealt lågpassfilter* filtrerar bort alla komponenter med vinkelfrekvens över en viss gränsvinkelfrekvens Ω, dvs vi har

$$\hat{h}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{för} \quad |\omega| < \Omega, \\ 0 & \text{för} \quad |\omega| > \Omega. \end{cases}$$

Impulssvaret är

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\omega t}d\omega = \frac{\sin \Omega t}{\pi t}.$$

Eftersom $h(t)$ inte är 0 för alla $t < 0$, är inte systemet kausalt. Ett idealt lågpassfilter kan alltså inte realiseras fysikaliskt, men begreppet är ändå användbart som en matematisk idealisering.

Exempel 4.2. Det ideala lågpassfiltret i Exempel 4.1 är inte kausalt, men kanske situationen förbättras om vi kräver mindre av $\hat{h}(\omega)$. Antag att vi bara kräver att $\hat{h}(\omega) = 0$ för $|\omega| > \Omega$, $\hat{h}$ absolutintegrerbar men ej identiskt noll. Vi kan Fourierframställa $h(t)$ som

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{h}(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

Här kan vi låta t vara en komplex variabel, och $h(t)$ blir då analytisk i hela t-planet. Om $h(t) = 0$ på negativa realaxeln, ger entydighetssatsen för analytiska funktioner att $h(t) = 0$ för all t. Då är

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}dt = 0,$$

i strid med förutsättningen. Alltså är inte heller detta system kausalt.

Definition. Ett linjärt, tidsinvariant system med impulssvar $h(t)$ kallas *stabilt* om $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$.

Den fysikaliska betydelsen av stabilitet är att begränsade insignaler ger upphov till begränsade utsignaler. Detta framgår av följande sats.

Sats 4.4. *Ett linjärt, tidsinvariant system S är stabilt om och endast om det finns en konstant K så att*

$$|x(t)| \le M \quad \textit{för alla} \quad t \Rightarrow |S[x](t)| \le KM \quad \textit{för alla} \quad t. \tag{4.1}$$

Bevis. 1. Antag S stabilt. Antag $|x(t)| \le M$ för alla t. Då är

$$\begin{aligned} |S[x](t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau)\, d\tau \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|\, d\tau \le \\ \le M \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau, \end{aligned}$$

dvs. vi har egenskapen (4.1) med $K = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau < \infty$.

2. Antag egenskapen (4.1) är uppfylld. Välj insignalen

$$x(t) = \begin{cases} \frac{\bar{h}(-t)}{|h(-t)|}, & \text{då} \quad h(-t) \neq 0, \\ 0, & \text{då} \quad h(-t) = 0. \end{cases}$$

Då är $|x(t)| \le 1$ för alla t, och enligt (4.1) är $|S[x](t)| \le K \cdot 1$ för alla t. Speciellt är $|S[x](0)| \le K$. Men

$$S[x](0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau.$$

Alltså är $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau \le K < \infty$, dvs. S är stabilt. □

5. Samplingsteoremet

En version av samplingsteoremet finns bevisad i Folland, sid. 230. Här ges ett annat bevis som utnyttjar δ-funktioner och Fourierserieutveckling av ett impulståg.

Om en tidskontinuerlig funktion $f(t)$ samplas (känns av) vid tidpunkterna $t = nT$ erhålls en tidsdiskret signal $\{f(nT)\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Denna kan representeras på tidskontinuerlig form som det viktade impulståget $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT)$. Vi har (om $f(t)$ är kontinuerlig)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-nT) = f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = f(t)s_T(t).$$

Bandbegränsade signaler kan rekonstrueras ur sina sampelvärden som följande sats visar.

Sats 5.1 (Samplingsteoremet). *Antag att $f(t)$ är kontinuerlig med Fouriertransform $\hat{f}(\omega) = 0$ för $|\omega| \geq \alpha$ (bandbegränsad signal). Om signalen samplas med frekvensen $\frac{1}{T} \geq \frac{\alpha}{\pi}$ (vinkelfrekvens $\Omega = \frac{2\pi}{T} \geq 2\alpha$), så kan $f(t)$ återvinnas ur den samplade signalen genom en lågpassfiltrering med avhuggningsvinkelfrekvens α (LP_α-filtrering) och multiplikation med T.*

Bevis. Impulståget $s_T(t)$ har Fourierserieutvecklingen

$$s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}, \quad \text{där} \quad c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_T(t)e^{-in\Omega t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)e^{-in\Omega t}dt = \frac{1}{T}.$$

Den samplade signalen är $f(t)s_T(t)$, och genom Fouriertransformering erhålles

$$f(t)s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}e^{in\Omega t}f(t) \supset \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega - n\Omega).$$

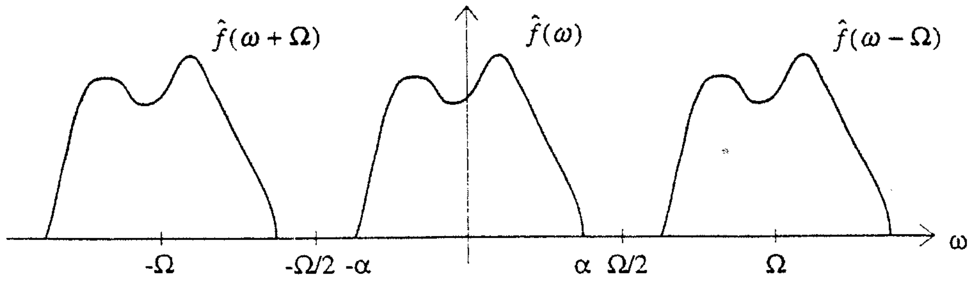
LP_α-filtrering innebär på transformsidan multiplikation med

$$\hat{h}_\alpha(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{då } |\omega| \leq \alpha, \\ 0, & \text{då } |\omega| > \alpha. \end{cases}$$

Efter sampling, LP_α-filtrering och multiplikation med T fås

$$T\mathrm{LP}_\alpha(f(t)s_T(t)) \supset \hat{h}_\alpha(\omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega - n\Omega).$$

Av termerna i summan är det bara den för $n = 0$ som är $\neq 0$ i frekvensbandet $|\omega| \leq \alpha$ (se fig.).



Därför är

$$\hat{h}_\alpha(\omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega-n\Omega)=\hat{f}(\omega),$$

och

$$\mathrm{TLP}_\alpha(f(t)s_T(t))=f(t).$$

□

Övningsexempel.

1) Antag samma förutsättningar som i samplingsteoremet. Visa att

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\frac{T\sin(\alpha(t-nT))}{\pi(t-nT)}.$$

2) Signalen $f(t)$ har Fouriertransformen $\hat{f}(\omega)=\theta(\omega+\alpha)-\theta(\omega-\alpha)$, där $\alpha>0$ är en given gränsvinkelfrekvens. Signalen samplas med vinkelfrekvensen $\Omega>\alpha$, dvs. man bildar

$$f_s(t)=T\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\delta(t-nT),$$

där $\Omega T=2\pi$. Denna lågpassfiltreras sedan med avhuggningsvinkelfrekvens α (idealt lågpassfilter). Låt $g(t)$ vara resultatet av sampling och filtrering. Beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)-g(t)|^2dt.$$

Svar.

2. 0 om $\Omega\geq 2\alpha$; $\frac{1}{\pi}(2\alpha-\Omega)$ om $\alpha<\Omega<2\alpha$.