MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Datum: 2012-01-14
Telefon: Adam Wojciechowski
0703 - 088304
Skrivtid: 8.30 – 13.30

Tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2 och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Hjälpmedel: Godkänd räknedosa, BETA samt “Några tips om Fourierserier m.m. i BETA” (två sidor).
Svar i form av svårberäknade integraluttryck kan i vissa fall accepteras eller åtminstone ge poäng.

(maxpoäng inom parentes, med summa 60)

1. Utveckla funktionen te^{-t} i Fourierserie på intervallet $[-\pi, \pi]$. Ange också var i intervallet serien konvergerar och vad dess summa är i varje konvergenspunkt. (5+3)

2. Bestäm en lösning till den s.k. konvektions-diffusionsekvationen
$$u_t = u_{xx} + cu_x, \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$
där $u = u(x,t)$ har begynnelsevärdena $u(x,0) = 1$ för $|x| < 2$ och $u(x,0) = 0$ för $|x| > 2$. Här är c en reellvärd konstant. (8)

3. Låt $a > 0$ vara en konstant. Bestäm det minsta möjliga värdet av integralen
$$\int_{-a}^{a} (x^4 - P(x))^2 \, dx,$$
där P är ett reellt polynom av grad högst 3. (8)

4. Lös Dirichlets problem $\Delta u = 0$ i halvcirkelskivan $x^2 + y^2 < R_0^2$, $y > 0$, med randvillkoren $u(x,y) = y$ för $x^2 + y^2 = R_0^2$ och $u_y(x,0) = 0$ för $|x| < R_0$. (8)

5. Låt f vara Fouriertransformen av funktionen $\frac{1}{1+|x|}$ på $\mathbb{R}$.
(a) Verifiera att f är reellvärd och jämn. (1)
(b) Beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2\,dx \qquad \text{och} \qquad \int_0^{\infty} f(x)\frac{\sin ax}{x}\,dx,$$

där $a > 0$ är en konstant. (3+4)

6. Betrakta värmeledningsekvationen $u_t = \Delta u$ i skivan $r < A$, där $r = \sqrt{x^2+y^2}$ och $A > 0$ är en konstant. Om u har randvärden $u(x,y,t) = 1$ för $r = A,\ t > 0$ samt initialvärden $u(x,y,0) = r^2$, vad är u? (8)

7. Formulera satserna som ger samband mellan Fourierkoefficienterna för en funktion och för dess derivata resp. dess primitiva funktioner. Ge också ett bevis i fallet med derivata. Det räcker att behandla den komplexa formen, alltså med e^{inx}, på $[-\pi,\pi]$. (2+2+2)

8. Beskriv hur ett reguljärt Sturm-Liouville-problem ger upphov till ett fullständigt ortogonalsystem. (6)