MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers 		Datum: 2012-01-14

LÖSNINGAR TILL
tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2 och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Uppgift 1.
Vi väljer att använda basen $(e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$, men man kan också arbeta med $\cos nx$, $\sin nx$. Koefficienterna blir

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} te^{-t}e^{-int}\,dt,$$

och med en partialintegration får man

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{(1+in)}te^{-(1+in)t}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi(1+in)}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-(1+in)t}\,dt \\ &= -\frac{(-1)^n}{2(1+in)}(e^{\pi}+e^{-\pi}) + \frac{(-1)^n}{2\pi(1+in)^2}(e^{\pi}-e^{-\pi}) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}\cosh\pi}{(1+in)} + \frac{(-1)^n\sinh\pi}{\pi(1+in)^2}.\end{aligned}$$

Funktionen har alltså Fourierserien $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ med dessa c_n.

Ovanstående uttryck för c_n kan duga som svar på den första delen av uppgiften, men man kan förstås dela upp i real- och imaginärdelar:

$$\begin{aligned}c_n = \frac{(-1)^{n+1}\cosh\pi}{1+n^2} &+ \frac{(-1)^n(1-n^2)\sinh\pi}{\pi(1+n^2)^2} \\ &+ i\frac{(-1)^n n\cosh\pi}{1+n^2} + i\frac{(-1)^{n+1}2n\sinh\pi}{\pi(1+n^2)^2}.\end{aligned}$$

Via $c_n \pm c_{-n}$ kan man härifrån ganska lätt bestämma koefficienterna i funktionens Fourierserie i basen $\cos nx$, $\sin nx$. Man får

$$a_n = \frac{2(-1)^{n+1}\cosh\pi}{1+n^2} + \frac{2(-1)^n(1-n^2)\sinh\pi}{\pi(1+n^2)^2},$$

utom att faktorerna 2 här ska utelämnas för $n = 0$, och

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1} n \cosh \pi}{1+n^2} + \frac{4(-1)^n n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)^2}.$$

Eftersom (den periodiserade) funktionen är styckvis glatt, och kontinuerlig utom i ändpunkterna $\pm\pi$, konvergerar serien mot funktionsvärdena te^{-t} i det öppna intervallet $-\pi < t < \pi$. För $t = \pm\pi$ konvergerar den mot medelvärdet av vänster- och högergränsvärdena av den periodiserade funktionen, alltså mot $(\pi e^{-\pi} - \pi e^{\pi})/2 = -\pi \sinh \pi$.

Anm. För att slippa att partialintegrera kan man finna de primitiva funktioner man behöver i BETA 7.4, formel (320) sid 175 för den komplexa serien resp. (334) och (335) sid 176 för cos-sin-varianten.

Uppgift 2.
Eftersom variabeln x rör sig över hela linjen, är det lämpligt att Fouriertransformera u och hela ekvationen i x-variabeln. Man får en funktion $\hat{u}(\xi, t)$ som satisfierar

$$\hat{u}_t = (-\xi^2 + ic\xi)\hat{u}.$$

Fouriertransformation av de givna begynnelsevärdena ger att $\hat{u}(\xi, 0) = 2\,\frac{\sin 2\xi}{\xi}$. För fixt ξ har vi då en enkel ordinär differentialekvation för $\hat{u}$ i t-variabeln, med startvärde, vars lösning är

$$\hat{u}(\xi, t) = 2\,\frac{\sin 2\xi}{\xi}\, e^{(-\xi^2 + ic\xi)t}.$$

För att finna den inversa Fouriertransformen av denna produkt utnyttjar vi satsen om Fouriertransformen av en faltning, och söker därför de inversa Fouriertransformerna av de två faktorerna. Den första faktorn är ju Fouriertransformen av begynnelsevärdena. Funktionen $e^{-\xi^2 t}$ har inversa Fouriertransformen $\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/(4t)}$, så inversa transformen av $e^{(-\xi^2+ic\xi)t}$ blir translatet $\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x+ct)^2/(4t)}$. Därför får vi u

som faltningen i x-variabeln av denna sista funktion och de givna begynnelsevärdena, alltså

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-2}^{2} e^{-(x+ct-y)^2/(4t)}\,dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(x+ct-2)/\sqrt{4t}}^{(x+ct+2)/\sqrt{4t}} e^{-s^2}\,ds.
\end{aligned}
$$

Här kommer vi inte längre, eftersom den primitiva funktionen till e^{-s^2} inte kan uttryckas i elementära funktioner. (Däremot kan den uttryckas i termer av funktionen erf.)

Det finns andra lösningar, som alla växer på ett fysikaliskt orimligt sätt.

Anm. Ett elegant sätt att komma fram till samma lösning är att införa funktionen $v(x,t) = u(x-ct,t)$. Då kommer v att satisfiera den vanliga värmeledningsekvationen och ha samma begynnelsevärden som u. Man vet då att v ges av faltning med värmeledningskärnan $\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/(4t)}$.

Uppgift 3.
För att komma till intervallet $[-1,1]$, där Legendrepolynomen bildar ett ortogonalsystem, sätter vi $x = ay$ så att integralen blir

$$
a^9 \int_{-1}^{1} (y^4 - a^{-4}P(ay))^2\,dy.
$$

När $P(x)$ varierar över alla reella polynom av grad högst 4, gör $\tilde{P}(y) = a^{-4}P(ay)$ detsamma. Detta visar att det sökta minsta värdet är proportionellt mot a^9. Vi betraktar därför fallet $a = 1$ av det givna problemet.

Polynomet P varierar över vektorrummet av alla polynom av grad högst 3, som är detsamma som det vektorrum som spänns upp av Legendrepolynomen P_0, P_1, P_2 och P_3. Här använder vi förstås reella skalärer. Satsen om bästa approximation säger då att integralen tar sitt minsta värde då P är den ortogonala projektionen Q av x^4 på detta vektorrum, projektionen tagen i $L^2[-1,1]$. I BETA 12.2, tabellrutan på sidan 263, kan man se att

$$x^4 = \frac{1}{35}(8P_4 + 20P_2 + 7P_0).$$

Av detta avläser vi att projektionen är

$$Q = \frac{1}{35}(20P_2 + 7P_0).$$

Detta kan man förstås skriva som ett vanligt andragradspolynom, men det behöver vi inte göra. I stället observerar vi att

$$x^4 - Q(x) = \frac{8}{35}P_4(x).$$

Integralens minsta värde är därför

$$\frac{8^2}{35^2}\int_{-1}^{1} P_4(x)^2\,dx.$$

Enligt formeln betecknad Orthogonality på sidan 263 i BETA är värdet av integralen i detta uttryck 2/9. Det sökta minsta värdet är alltså i fallet $a = 1$

$$\frac{8^2 \cdot 2}{35^2 \cdot 9} = \frac{128}{11025}.$$

Svaret på uppgiften är därför

$$\frac{128}{11025}\,a^9.$$

Uppgift 4.

Vi använder polära koordinater så att $u = u(r,\theta)$ och får ekvationen

$$u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} = 0$$

i området $0 < r < R_0,\ 0 < \theta < \pi$. Randvillkoren blir $u(R_0,\theta) = R_0 \sin\theta$ och $u_\theta(r,0) = u_\theta(r,\pi) = 0$. Variabelseparation $u = R(r)\Theta(\theta)$ som i Folland 4.4 ger för Θ

$$\Theta'' + \nu^2\Theta = 0, \qquad \Theta'(0) = \Theta'(\pi) = 0.$$

Härav ser man att ν måste vara reellt och ett heltal, säg $\nu = n \in \{0, 1, \dots\}$, och att $\Theta(\theta)$ är en multipel av $\cos n\theta$. För R blir ekvationen

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - n^2 R(r) = 0.$$

Detta är en Eulerekvation, och lösningarna är linjärkombinationer av r^n och r^{-n} då $n > 0$ och av 1 och $\ln r$ då $n = 0$. Av dessa behåller vi bara dem som är begränsade vid 0, alltså r^n, $n = 0, 1, \dots$. Genom att som vanligt bilda linjärkombinationer av de separerade lösningarna ansätter vi u av formen

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \cos n\theta.$$

Randvillkoret för $r = R_0$ leder då till

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R_0^n \cos n\theta = R_0 \sin\theta.$$

Utvecklingen av funktionen $\sin\theta$ i cosinusserie i $[0, \pi]$ är enligt BETA 13.1 (10) med $L = \pi$ och $h = 1$

$$\sin\theta = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos 2k\theta.$$

Det följer att $a_0 = 2R_0/\pi$ och $a_{2k-1} = 0$ och

$$a_{2k} = -\frac{4}{\pi} \frac{R_0^{1-2k}}{4k^2 - 1}.$$

för $k = 1, 2, \dots$. Lösningen till problemet är alltså

$$u(r,\theta) = \frac{2R_0}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_0^{1-2k}}{4k^2 - 1} r^{2k} \cos 2k\theta.$$

Uppgift 5.

(a) Funktionen $h(x) = 1/(1 + |x|)$ ligger inte i $L^1(\mathbb{R})$ men i $L^2(\mathbb{R})$. Därför ligger också dess Fouriertransform f i $L^2(\mathbb{R})$, De avhuggna funktionerna $h_R(x) = \chi_{\{|x|<R\}}/(1 + |x|)$, där

vi alltså ersätter h:s värden med noll utanför intervallet $(-R, R)$, ligger i både L^2 och L^1 och konvergerar i L^2-norm mot h då $R \to \infty$. Det följer att f är L^2-gränsvärdet av $\widehat{h_R}$ då $R \to \infty$. Men $\widehat{h_R}$ kan skrivas som

$$\widehat{h_R}(\xi) = \int_{-R}^{R} \frac{e^{-ix\xi}}{1+|x|}\, dx = \int_{-R}^{R} \frac{\cos x\xi}{1+|x|}\, dx - i \int_{-R}^{R} \frac{\sin x\xi}{1+|x|}\, dx.$$

Av paritetsskäl ser man här att imaginärdelen är 0, och realdelen är jämn i ξ. Varje $\widehat{h_R}$ är alltså reellvärd och jämn, och detsamma gäller då för deras limes f. Därmed är (a) visat.

Anm. Trots att h inte tillhör L^1, kan man skriva f som

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{1+|x|}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\xi}{1+|x|}\, dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\xi}{1+|x|}\, dx$$

för $\xi \neq 0$, om man tolkar dessa integraler som $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R}$. Härav följer (a) direkt.

(b) Plancherels sats ger

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)^2\, d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)|^2\, d\xi \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+|x|)^2}\, dx = 4\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\, dx = 4\pi.\end{aligned}$$

Eftersom f är jämn, kan vi skriva den andra integralen i uppgiften som

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{\sin a\xi}{\xi}\, d\xi.$$

I en tabell (BETA 13.2 F50) ser man att $\xi^{-1} \sin a\xi$ är Fouriertransformen av $\chi_{[-a,a]}/2$, alltså den funktion som är $1/2$ i intervallet $[-a, a]$ och 0 för övrigt. Enligt Plancherels sats är ovanstående uttryck därför lika med

$$\frac{1}{2}\, 2\pi\, \frac{1}{2} \int_{-a}^{a} \frac{1}{1+|x|}\, dx = \pi \int_0^a \frac{1}{1+x}\, dx = \pi \ln(1+a).$$

Uppgift 6.
Eftersom alla indata är rotationsinvarianta, dvs. oberoende av θ, kommer lösningen u också att bli rotationsinvariant, så att $u = u(r, t)$.

Randvillkoret $u = 1$ på skivans periferi är inte homogent, men däremot tidsoberoende. Därför söker vi först en steady state-lösning $u_0 = u_0(r)$ till ekvationen $\Delta u_0 = 0$ som antar detta randvärde. Det är ett trivialt Dirichletproblem i skivan, med lösningen $u_0 = 1$.

Vi skall nu bestämma $v(r, t) = u(r, t) - u_0(r) = u(r, t) - 1$. I likhet med u kommer v att satisfiera värmeledningsekvationen, $v_t = \Delta v$. Detta betyder att

$$v_t = v_{rr} + r^{-1} v_r,$$

och v har randvärden $v(A, t) = 0$ och initialvärden $v(r, 0) = r^2 - 1$.

Vi söker först de separerade lösningarna $v = R(r)T(t)$. Ekvationen blir

$$R(r)T'(t) = R''(r)T(t) + r^{-1}R'(r)T(t).$$

Genom division med $R(r)T(t)$ ser man som vanligt för $T(t)$ att $T'(t) = \sigma T(t)$ för någon konstant σ. För $R(r)$ får man ekvationen

$$R''(r) + r^{-1}R'(r) - \sigma R(r) = 0.$$

Randvillkoren för $R(r)$ blir $R(A) = 0$, och dessutom skall $R(r)$ vara begränsad vid $r = 0$.

Om $\sigma > 0$, säg $\sigma = \mu^2$ för något $\mu > 0$, har vi den modifierade Besselekvationen med index $\nu = 0$. Dess lösningar är linjärkombinationer av $I_0(\mu r)$ och $K_0(\mu r)$. Av dessa är $K_0(\mu r)$ obegränsad vid 0 och måste förkastas, och $I_0(\mu r)$ saknar nollställe på positiva halvaxeln och förkastas också. För $\sigma = 0$ får vi en Eulerekvation, vars lösningar är linjärkombinationer av 1 och $\ln r$. Dessa båda förkastas av liknande skäl.

Då återstår fallet $\sigma = -\mu^2 < 0$, som ger Besselekvationen och alltså två linjärt oberoende lösningar $J_0(\mu r)$ och $Y_0(\mu r)$. Den senare förkastas eftersom den är obegränsad vid 0. Randvillkoret vid A medför nu att $J_0(\mu A) = 0$, så att $\mu = \lambda_n/A$ för något n, där λ_n, $n = 1, 2, \ldots$ är nollställena till J_0 på positiva halvaxeln.

Nu när vi känner μ och därmed σ, ser vi att $T(t)$ blir en multipel av $\exp\left(-\lambda_n^2 t/A^2\right)$. För v får vi då följande serieutveckling:

$$v(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0\left(\frac{\lambda_n r}{A}\right) \exp\left(-\frac{\lambda_n^2 t}{A^2}\right).$$

För att utnyttja initialvärdena sätter vi här $t = 0$ och får

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0\left(\frac{\lambda_n r}{A}\right) = r^2 - 1,$$

som skall gälla för $0 < r < A$. Men nu vet man att funktionerna $J_0\left(\lambda_n r/A\right)$, $n = 1, 2, \ldots,$ bildar ett fullständigt ortogonalsystem i $(0, A)$ med vikten r, och att

$$\int_0^A J_0\left(\lambda_n r/A\right)^2 r\,dr = A^2 J_1(\lambda_n)^2/2.$$

Se BETA 12.4 sidan 275, "Orthogonal series ...". Därför blir koefficienterna

$$a_n = \frac{2}{A^2 J_1(\lambda_n)^2} \int_0^A J_0\left(\frac{\lambda_n r}{A}\right)(r^2 - 1) r\,dr.$$

Man kan nöja sig med detta uttryck för a_n.

Men det går att beräkna denna sista integral: variabelbytet $s = \lambda_n r/A$ ger

$$a_n = \frac{2A^2}{\lambda_n^4 J_1(\lambda_n)^2} \int_0^{\lambda_n} J_0(s)\, s^3\,ds - \frac{2}{\lambda_n^2 J_1(\lambda_n)^2} \int_0^{\lambda_n} J_0(s)\, s\,ds.$$

De båda integralerna här är kända. Enligt övningarna 5.2.8 och 5.2.4 i Folland är deras värden

$$(\lambda_n^3 - 4\lambda_n) J_1(\lambda_n) \qquad \text{resp.} \qquad \lambda_n J_1(\lambda_n).$$

Detta kan också fås ur BETA 12.4, den åttonde raden i rutan på sidan 274 med $C_0 = J_0$ och $C_1 = J_1$. Resultatet blir då

$$a_n = \frac{2}{J_1(\lambda_n)} \left(\frac{A^2 - 1}{\lambda_n} - \frac{4A^2}{\lambda_n^3} \right).$$

Svaret på uppgiften blir

$$u(r,t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0\left(\frac{\lambda_n r}{A}\right) \exp\left(-\frac{\lambda_n^2 t}{A^2}\right),$$

med ovanstående a_n.