MVE290 - Fouriermetoder, TM2 2011/12
Inlämningsuppgifter i distributionsteori

Varje grupp skall göra de fyra förövningarna och en av huvudövningarna. Förövningarna är desamma för alla, utom att q **skall ersättas med den valda huvudövningens nummer**, alltså ett tal mellan 1 och 19.

Några upplysningar
I vissa uppgifter används begreppet *karakteristiska funktionen* för en mängd E. Det betyder den funktion χ_E som ges av att $\chi_E(x)$ är 1 om $x \in E$, annars 0. Sålunda är Heavisidefunktionen $H(x)$ den karakteristiska funktionen för positiva halvaxeln.
Vi skriver δ_y för den distribution vars verkan på en godtycklig testfunktion ges av

$$\delta_y[\phi] = \phi(y).$$

I Folland betraktas δ_y som ett translat $\delta(. - y)$ av "Diracfunktionen" (ett bättre namn är Diracdistributionen) $\delta = \delta_0$.

Observera tryckfelen på sidorna 333 och 334 i Follands bok:
alla f i formlerna skall vara F.

Förövningar

(i) Verifiera enligt definitionen att

$$u[\phi] = \sum_{m=1}^{\infty} m\phi^{(m)}(m+q)$$

definierar en distribution u på $\mathbb{R}$. Som vanligt betecknar ϕ här en godtycklig testfunktion. Verifiera också att distributionerna u_n, givna av

$$u_n[\phi] = \sum_{m=n}^{\infty} m\phi^{(m)}(m+q),$$

konvergerar svagt (dvs. i distributionsmening) mot 0-distributionen då $n \to \infty$.

(ii) Betrakta distributionen

$$u = t^{1/q}\,\chi_{(1,2)} + \sum_{j=2+q}^{5+q} \delta_j.$$

Ange först vad $u[\phi]$ blir, för en testfunktion ϕ. Vad är (distributions)derivatan u' ? Ange också en primitiv distribution till u. Här svarar man lämpligen med uttryck som ger de sökta distributionernas verkan på en godtycklig testfunktion.

(iii) Fouriertransformen av δ är enligt Folland sid 335 $\hat{\delta} = 1$, alltså den konstanta funktionen 1, uppfattad som en distribution. Bestäm Fouriertransformen av δ_q och av funktionen $\cos(x-q)$. Observera att Fouriertransformen av en tempererad distribution u definieras av formel (9.28) sid 333 i Folland, som efter korrektion säger att

$$\hat{u}[\phi] = u[\hat{\phi}].$$

Här är ϕ är en godtycklig Schwartzfunktion.

(iv) Låt u_r vara den distribution i $\mathbb{R}^3$ vars verkan på en testfunktion ϕ är ytintegralen av ϕ över sfären $|x| = r$. Mot vilka distributioner konvergerar $r^{-2}u_{qr}$ svagt då $r \to 0$ och $r \to \infty$?

Huvudövningar

1. (a) Visa att distributionsekvationen $(1 + x^2)u = 0$ endast har lösningen $u = 0$. (Produkten av en funktion och en distribution definieras i Follands formel (9.6).)

   (b) Visa att distributionsekvationen $xu = 0$ har lösningarna $u = C\delta$ och endast dessa, där C är en godtycklig konstant. Ledning för "endast"-delen: Fixera en testfunktion ψ med $\psi(0) \neq 0$ och skriv en godtycklig testfunktion ϕ som $\phi = a\psi + \tilde{\phi}$, där $\tilde{\phi}$ är en testfunktion med $\tilde{\phi}(0) = 0$. Vi påstår nu att $\tilde{\phi}(x)/x$ också är en testfunktion. Verifiera först att detta skulle räcka för att avsluta beviset av "endast"-delen. Visa sen påståendet, t ex. genom att skriva $\tilde{\phi}$ som integralen av sin derivata från 0 till x och transformera till en integral från 0 till 1.

2. (a) Betrakta för $r > 0$ distributionen u_r på $\mathbb{R}$ definierad av

$$u_r[\phi] = r^{-3} \int_{-r}^{r} (\phi(x) - \phi(0))\, dx,$$

   där ϕ är en testfunktion. Visa att u_r har ett svagt gränsvärde v då $r \to 0$, och att distributionen v ges av att $v[\phi]$ är en multipel av $\phi''(0)$. Vilken multipel får man?
   Ledning: Taylorutveckla.
   (b) Gör motsvarande i planet, med

$$u_r[\phi] = r^{-4} \int_{x^2+y^2<r^2} (\phi(x, y) - \phi(0, 0))\, dxdy.$$

   Visa att man som gränsvärde här får en multipel (vilken?) av Laplaceoperatorn i 0.
   (c) Hur ser detta ut i n dimensioner?

3. (a) Sätt $u_N = N \cos Nx$ på $\mathbb{R}$ och betrakta denna funktion som en distribution. Visa, t ex. genom partialintegrationer, att u_N konvergerar svagt mot en distribution (vilken?) då $N \to \infty$. Skissa grafen för u_N; kan den förklara distributionskonvergensen, trots avsaknaden av punktvis konvergens?

   (b) Samma konvergensfråga för $\chi_{\mathbb{R}_-} N \sin Nx$, där $\mathbb{R}_-$ är den negativa halvaxeln.

   (c) Samma fråga för $H(x)\frac{\sin Nx}{x}$.
   Ledning för (c): Partialintegrera så att man får en primitiv funktion till $\frac{\sin Nx}{x}$. Utnyttja att $\int_0^M \sin t/t\, dt \to \pi/2$ då $M \to \infty$.

4. För $\mu > 0$ definierar

$$u_\mu[\phi] = \int_0^\infty x^{\mu-1}\phi(x)\, dx$$

   en distribution u_μ på $\mathbb{R}$. Då $\mu \to 0$ har denna integral för de flesta testfunktioner ϕ inget ändligt gränsvärde; verifiera detta med exempel. Därför har distributionerna u_μ inget svagt gränsvärde då $\mu \to 0$. Detta kan avhjälpas genom multiplikation med en lämplig faktor. Bestäm en kvantitet $Q(\mu)$ sådan att $Q(\mu)u_\mu[\phi]$ konvergerar då $\mu \to 0$, för alla testfunktioner ϕ, och det mot ett värde som inte alltid är 0. Detta betyder att $Q(\mu)u_\mu$ konvergerar svagt då $\mu \to 0$, mot en distribution som inte är nolldistributionen. Ange också vilken denna gränsdistribution är. Man har alltid $\mu > 0$ här.
   Ledning: För att gissa vad $Q(\mu)$ skall vara, ersätt först $\phi(x)$ i integralen med karakteristiska funktionen för ett intervall $(0, a)$. Sen kan man verifiera konvergensen genom att dela upp den givna integralen i integraler över $(0, a)$ och (a, ∞) och skriva ϕ som $\phi(x) = (\phi(x) - \phi(0)) + \phi(0)$ i den första

av dem. Detta ger tre integraler, som alla konvergerar då $\mu \to 0$.

5. Anta att distributionen u på $\mathbb{R}$ uppfyller $u' = 0$, den enklaste av alla differentialekvationer. Visa att u då är en konstant funktion. Att tillåta u att vara en distribution ger alltså inga "nya" lösningar.

   Ledning: Genom att uttrycka ekvationen med hjälp av testfunktioner ser man att man behöver kunna avgöra när en given testfunktion ϕ ges av $\phi = \psi'$ för någon testfunktion ψ. Om det är så, måste $\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(y)\, dy$ eftersom både ϕ och ψ är 0 nära $-\infty$. Därför hänger det på om denna integral är 0 nära $+\infty$. Formulera med hjälp av detta ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att ϕ är derivatan av en testfunktion. Lös sedan det givna problemet genom att fixera en testfunktion som *inte* är en derivata, och skriv en godtycklig testfunktion som en multipel av denna plus derivatan av någon testfunktion. Låt distributionen u verka på detta uttryck.

6. (a) Låt χ_A, χ_B och χ_C beteckna de karakteristiska funktionerna för nedanstående mängder i $\mathbb{R}^2$ och betrakta dem som distributioner i planet. Bestäm distributionsderivatorna

$$\partial\chi_A/\partial x_1, \qquad \partial\chi_B/\partial x_1 \qquad \text{och} \qquad \partial\chi_C/\partial x_1$$

   samt andraderivatorna $\partial^2\chi_A/\partial x_1\partial x_2$ och $\partial^2\chi_B/\partial x_1\partial x_2$, lämpligen genom att ange hur dessa distributioner verkar på en testfunktion. Här är
   $A = \{(x_1, x_2) : x_1 < 0,\ x_2 < 0\}$
   $B = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 < 0\}$
   $C = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$.

(b) Efter en enkel variabeltransformation kan vågekvationen i planet skrivas $\partial^2 u/\partial x_1 \partial x_2$. Det är enkelt och välkänt att den allmänna lösningen till denna ekvation är $u(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2)$, där f och g är godtyckliga deriverbara funktioner. Men i distributionsmening finns ytterligare lösningar: En distribution v i planet säges vara oberoende av x_2 om den ges av en distribution v_1 på $\mathbb{R}$ genom att för varje testfunktion ϕ i planet

$$v[\phi] = v_1 \left[\int \phi(x_1, x_2)\, dx_2 \right].$$

Här menar vi att v_1 får verka på den 1-dimensionella testfunktionen $x_1 \mapsto \int \phi(x_1, x_2)\, dx_2$. Visa att en sådan distribution satisfierar ekvationen $\partial^2 u/\partial x_1 \partial x_2$. I detta resonemang kan man förstås låta x_1 och x_2 byta roller, och i själva verket ges den allmänna distributionslösningen av en summa av två distributioner som är oberoende av x_1 resp. x_2 (detta behöver ej visas).

7. Den funktion på $\mathbb{R}$ som tar värdena $1/\sqrt{x}$ för $x > 0$ och 0 för övrigt är lokalt integrerbar trots singulariteten i 0. Därför definierar den en distribution på $\mathbb{R}$, som i Folland betecknas $X_+^{-1/2}$. Funktionens punktvisa derivata tar värdena $-x^{-3/2}/2$ för $x > 0$ och är inte lokalt integrerbar. Den definierar därför inte automatiskt någon distribution. Vi skall se att distributionsderivatan av $X_+^{-1/2}$ ändå hänger ihop med den punktvisa derivatan. Visa att denna distributionsderivata är $-X_+^{-3/2}/2$ där distributionen $X_+^{-3/2}$ ges i övning 9.3.9 i Folland, i specialfallet $\lambda = 3/2,\ k = 1$.
   Ledning. Skriv upp vad distributionsderivatans verkan på en testfunktion ϕ blir, enligt definitionen av distributionsderivata. (Jämför ev. med Folland formel (9.22), sid 327,

för $X_+^{-\lambda}$.) För att komma härifrån till uttrycket i övning 9.3.9, partialintegrera i de två intervallen $(\varepsilon, 1)$ och $(1, \infty)$. Som primitiv funktion till ϕ' väljer man i det förstnämnda intervallet inte ϕ utan $\phi - \phi(0)$. Sen får $\varepsilon \to 0$.

8. Den klassiska vågekvationen $u_{tt} - c^2 u_{xx}$ i en rumsdimension har den allmänna lösningen $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$, där f och g är godtyckliga, två gånger deriverbara funktioner på $\mathbb{R}$.

   Här är $c > 0$ en konstant. Detta är välkänt och skall ej visas. Vi skall se att samma formel ger lösningar i distributionsmening även för mycket allmännare f och g. Eftersom $f(x+ct)$ och $g(x-ct)$ kan behandlas helt analogt, nöjer vi oss med fallet f.

   (a) Visa att om f är en lokalt integrerbar funktion på $\mathbb{R}$, så är $f(x+ct)$, betraktad som funktion i (x,t)-planet, lokalt integrerbar så att den definierar en distribution i planet. Visa också att denna distribution uppfyller vågekvationen i distributionsmening. Ledning: gör ett lämpligt variabelbyte i den integral som uppstår.

   (b) Mera allmänt, om f bara antas vara en distribution på $\mathbb{R}$ kan man tolka $f(x+ct)$ som en tvådimensionell distribution och visa att den också ger en distributionslösning till vågekvationen. Genomför detta för $f = \delta$.

9. (a) Betrakta funktionen $u(x) = \ln|x|$ som en distribution i $\mathbb{R}^3$ och $\mathbb{R}^2$. Man vill bestämma Δu, tagen i distributionsmening. Räkna först ut Δu i vanlig, punktvis mening utanför singulariteten i origo, lämpligen med hjälp av polära koordinater. Skriv sen upp den integral som ger verkan av distributionen Δu på en testfunktion. På denna integral kan man

använda “Greens andra identitet”, som uttrycker integralen av $f\Delta g - g\Delta f$ över ett område i termer av en integral över områdets rand. Välj ett begränsat område vars komplement innehåller ett litet klot kring origo. (Slå upp denna identitet, tex. genom att googla på “Green's identities”.) Låt sedan klotets radie gå mot 0. Blir resultatet att distributionen Δu ges av de punktvisa värdena eller inte?

10. Låt u vara distributionen $u = \ln|x|$ på $\mathbb{R}$.

    (a) Bestäm dilationerna $u^{[a]}$ för $a > 0$. Är u homogen, och i så fall av vilket gradtal? Se Folland sid 311 och övning 9.1.1.

    (b) Visa att distributionsderivatan u' är den distribution X^{-1}, principalvärdet av $1/x$, som definieras i formel (9.17) på sidan 324 i Folland. Ledning: Partialintegrera, men undvik då singulariteten i 0.

    (c) Genomför (a)-delen med u ersatt av u'.

11. Övning 9.5.3 i Folland. Den handlar om att distributionslösningar till ekvationen $\Delta u = f$, där f är en “snäll” funktion, i själva verket är lösningar i vanlig mening.

12. Funktionen $1/x$ på $\mathbb{R}$ är inte integrerbar nära 0, men den görs till en distribution X^{-1}, även kallad P.V. $1/x$ eller principalvärdet av $1/x$, enligt formel (9.17) på sidan 324 i Folland. Bestäm Fouriertransformen av denna distribution, på följande sätt. Verifiera att produkten $x\,X^{-1}$ som väntat är den konstanta funktionen 1; här använder vi produkten av en (lämplig) funktion och en distribution, som definieras i Follands formel (9.6). Fouriertransformera denna produkt, vilket ger den sökta Fouriertransformen så när som på en additiv konstant. Bestäm slutligen den additiva konstan-

ten genom att låta de inblandade distributionerna verka på Schwartzfunktionen e^{-x^2}, vars Fouriertransform man känner.

Använd resultatet för att också finna Fouriertransformen av Heavisidefunktionen.

13. Funktionen $1/x$ på $\mathbb{R}$ är inte integrerbar nära 0, men den görs till en distribution X^{-1}, även kallad P.V. $1/x$ eller principalvärdet av $1/x$, enligt formel (9.17) på sidan 324 i Folland. Bestäm liksom i föregående övning Fouriertransformen av denna distribution, men nu med följande metod. Visa att X^{-1} är gränsvärdet i svag mening av distributionerna $u_n = \frac{x}{x^2+1/n^2}$. Bestäm sen Fouriertransformerna av u_n och deras svaga gränsvärde.

    Använd resultatet för att också finna Fouriertransformen av Heavisidefunktionen.

14. För $0 < \lambda < 1$ är funktionen $x^{-\lambda}H(x)$ lokalt integrerbar och definierar en tempererad distribution kallad $X_+^{-\lambda}$.

    (a) Bestäm dess Fouriertransform, exempelvis genom att verifiera att den är svaga gränsvärdet av $e^{-\epsilon x}x^{-\lambda}H(x)$ då $\epsilon \searrow 0$. Fouriertransformen av den integrabla funktionen $e^{-\epsilon x}x^{-\lambda}H(x)$ ges enligt definitionen av en integral, och den kan man beräkna med hjälp av Γ-funktionen med komplexa argument.

    (b) Visa att distributionsderivatan av $x^{-\lambda}H(x)$ är $-\lambda X_+^{-\lambda-1}$, där $X_+^{-\lambda-1}$ är den distribution som definieras i Folland genom formlerna (9.21-22).

    (c) Bestäm Fouriertransformen av $X_+^{-\lambda-1}$, förslagvis med hjälp av (a) och (b).

15. Anta ζ är ett komplext tal med $\operatorname{Im}\zeta > 0$.
    (a) Bestäm Fouriertransformen $\hat{g}$, där $g(x) = \frac{1}{x^2-\zeta^2}$, exem-

pelvis med en komplex integration.
(b) Beräkna den 1-periodiska funktionen

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x+n),$$

lämpligen genom att använda (a) och formeln i övning 9.4.15 i Folland, efter att ha gjort denna övning. Observera att den serie man får är Fourierserien för f. Summera därefter denna serie.

16. (a) Låt $a > 0$. Funktionen $u(x) = e^{iax^2}$ är begränsad och definierar därför en tempererad distribution på $\mathbb{R}$. Bestäm Fouriertransformen av denna distribution. Ledning: Verifiera att distributionen u är svaga gränsvärdet då $\epsilon \searrow 0$ av $u_\epsilon(x) = e^{(ia-\epsilon)x^2}$, vars Fouriertransformer kan beräknas genom komplex integration eller analytisk fortsättning från det kända fallet $a = 0$. Låt slutligen $\epsilon \to 0$ och utnyttja Theorem 9.8 i Folland (där f skall vara F).

17. Enligt Theorem 9.6 i Folland är varje serie $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, med koefficienter som växer högst som någon potens av n, Fourierserien för någon 2π-periodisk distribution, och serien konvergerar svagt mot denna distribution. (Folland har glömt att ange att perioden är 2π.) Det följer att samma sak gäller för sinus- och cosinusserier. Mot vilka distributioner konvergerar serierna

$$\sum_1^\infty \cos nx, \qquad \sum_1^\infty n\sin nx \quad \text{och} \quad \sum_1^\infty \sin nx\,?$$

Ledning: Follands Theorem 9.3 medför att sådana här serier kan deriveras termvis i distributionsmening utan inskränkning. Prova att *integrera* de givna serierna, tills man får konvergens mot någon funktion. Derivera sen i distributionsmening.

18. Enligt Theorem 9.6 i Folland kan varje 2π-periodisk distribution u utvecklas i en Fourierserie, som konvergerar svagt mot u. (Folland har glömt att ange att perioden skall vara 2π.) Däremot kan inte koefficienterna fås med den vanliga integralformeln $(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)e^{-inx}\,dx$, eftersom denna integral saknar mening. Funktionen $(2\pi)^{-1}e^{-inx}\chi_{[-\pi,\pi]}(x)$ är ju inte någon testfunktion. Men man kan få koefficienterna genom att låta u verka på en testfunktion χ som i viss mening approximerar denna funktion. Detta beskrivs i Follands övning 9.3.1; genomför denna övning. Observera då tryckfelen: i definitionen av $\chi(x)$ (den första formeln i övningen) skall $(1-t)$ i exponenterna i båda integralerna vara $(2\pi-t)$. Substitutionen som nämns i del a. skall vara $s = 2\pi - t$.
Ledning till del c. : Tillämpa först formeln i del b. på $f(x) = e^{i\ell x}$. Utgå sen från kvantiteten $F[\chi(x)e^{-ikx}]$ och ersätt F med dess Fourierserie.

19. Den 2π-periodiska funktionen $\cot\frac{x}{2}$ definierar en 2π-periodisk distribution u om man tar dess principalvärde vid singulariteterna, alltså vid punkterna $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. För en testfunktion ϕ innebär detta att

$$u[\phi] = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x-2\pi n|>\varepsilon,\, n\in\mathbb{Z}} \cot\frac{x}{2}\,\phi(x)\,dx.$$

(a) Verifiera att detta gränsvärde existerar för varje testfunktion ϕ, så att man får en distribution.
Ledning: Utnyttja vid punkten 0 att cotangensfunktionen

är udda, genom att subtrahera $\phi(0)$ från ϕ i t.ex. intervallet $[-1, 1]$. Jämför med definitionen av P.V. $1/x$ i Folland, sidan 324. Motsvarande i andra punkter $2\pi n$.
(b) Enligt Theorem 9.6 på sidan 322 i Folland kan varje periodisk distribution utvecklas i Fourierserie. (Folland har glömt att ange att perioden skall vara 2π.) Bestäm utvecklingen av u.
Ledning: Visa att u är distributionsderivatan av funktionen $2 \ln |\sin \frac{x}{2}|$, vars Fourierserie finns i tabell. Derivera termvis.