MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Datum: 2012-03-10
Telefon: Martin Berglund
0703 - 088304
Skrivtid: 8.30 – 13.30

Tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2 och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Hjälpmedel: Godkänd räknedosa, BETA samt "Några tips om Fourierserier m.m. i BETA" (två sidor).
Svar i form av svårberäknade integraluttryck kan i vissa fall accepteras eller åtminstone ge poäng.

(maxpoäng inom parentes, med summa 61)

1. Ett linjärt, tidsinvariant dynamiskt system har systemfunktionen $i\omega/(3+\omega^2)$. Bestäm impulssvaret. Vilken utsignal får man med insignalen $\chi_{(0,1)}$? Som vanligt betecknar $\chi_{(0,1)}$ den funktion som är 1 i intervallet $(0,1)$ och 0 för övrigt. (3+5)

2. Lös värmeledningsekvationen $u_t = ku_{xx}$ i området $x > 0,\ t > 0$ med randvärden $u(0,t) = e^{-t}$ och initialvärden $u(x,0) = 1$. Konstanten k är positiv. (8)

3. Ange någon funktion f i intervallet $(0,\pi)$ sådan att integralen

$$\int_0^\pi |f(x) - \sum_{n=1}^{5} a_n \sin nx|^2\,dx, \qquad a_1,\ldots,a_5 \in \mathbb{R},$$

antar sitt minsta värde för $a_n = 1/n,\ n = 1,\ldots,5$. Detta minsta värde skall ej vara 0. (8)

4. Lös följande Dirichlet-Neumann-problem i en rektangel:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < \ell,\ 0 < y < L, \\ u_y(x,0) = 0,\ u_y(x,L) = 0, & 0 < x < \ell, \\ u(0,y) = 1 + y,\ u(\ell,y) = y^2, & 0 < y < L. \end{cases}$$

(8)

5. Bestäm Fouriertransformen, eller den inversa Fouriertransformen, av funktionen $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ och använd den för att visa att
$$\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^4}\, dx = \frac{\pi}{3}.$$
(4+4)

6. Svängningarna hos ett cirkulärt membran beskrivs av vågekvationen $u_{tt} = c^2 \Delta u$ med $u = u(x, y, t)$, där $x^2 + y^2 < R_0^2$ och $t > 0$. Randvillkoret är $u(x, y, t) = 0$ för $x^2 + y^2 = R_0^2$ och initialvillkoren $u(x, y, 0) = 0$ och $u_t(x, y, 0) = x$. Bestäm lösningen u. (9)

7. Formulera konvergenssatsen för Fourierserier och bevisa den i punkter där funktionen är kontinuerlig. Det räcker att betrakta en av varianterna, t.ex. komplexa Fourierserier i intervallet $[-\pi, \pi]$. (2+4)

8. Låt w vara en viktsfunktion i ett intervall I. Vad innebär det att $(P_n)_{n=0}^\infty$ är en följd av ortogonalpolynom med avseende på w? Förklara hur alla P_n är bestämda om koefficienterna för högstagradstermerna är fixerade, och beskriv hur man successivt kan konstruera dem. Välj något exempel och konstruera där P_0, P_1 och P_2. (1+4+1)