MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers   Datum: 2012-03-10

LÖSNINGAR TILL
tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2 och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Uppgift 1.
Impulssvaret är inversa Fouriertransformen av systemfunktionen. Eftersom $1/(3+\omega^2)$ enligt tabell är Fouriertransformen av funktionen $(2\sqrt{3})^{-1}e^{-|t|\sqrt{3}}$, är $i\omega/(3+\omega^2)$ Fouriertransformen av

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{d}{dt}e^{-|t|\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}\operatorname{sgn} t\, e^{-|t|\sqrt{3}} \tag{1}$$

som alltså är impulssvaret. Man kan också få denna inverstransform direkt ur BETA 13.2 F33.

Insignalen $\chi_{(0,1)}$ har Fouriertransformen

$$\int_0^1 e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1-e^{-i\omega}}{i\omega}.$$

OBS: att i stället för denna enkla uträkning använda tabell, och då se $\chi_{(0,1)}$ som skillnaden mellan Heavisidefunktionen och ett av dess translat, ger ett betydligt trassligare uttyck för samma Fouriertransform.

Motsvarande utsignal har Fouriertransformen

$$\frac{1-e^{-i\omega}}{i\omega}\frac{i\omega}{3+\omega^2} = (1-e^{-i\omega})\frac{1}{3+\omega^2}.$$

Av detta tar vi invers Fouriertransform och får utsignalen

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}(e^{-|t|\sqrt{3}} - e^{-|t-1|\sqrt{3}}).$$

Ett alternativ är att beräkna utsignalen som faltningen av impulssvaret och insignalen, alltså

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} s\, e^{-|s|\sqrt{3}}\chi_{(0,1)}(t-s)\, ds = -\frac{1}{2}\int_{t-1}^{t} \operatorname{sgn} s\, e^{-|s|\sqrt{3}}\, ds.$$

Den sista integralen här kan förstås beräknas direkt. Men då måste man dela in i fall beroende på om punkten 0 ligger inom, eller till vänster eller till höger om intervallet $(t-1, t)$. Det finns ett enklare sätt: att utnyttja att integranden är en derivata, enligt (1). Därför blir faltningen

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \int_{t-1}^{t} \frac{d}{ds} e^{-|s|\sqrt{3}}\, ds = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[e^{-|s|\sqrt{3}} \right]_{t-1}^{t},$$

vilket är samma resultat som vi fick nyss. Observera att man kan integrera derivatan här som vanligt även om intervallet innehåller punkten 0, där derivatan inte existerar. Det går bra eftersom funktionen $e^{-|s|\sqrt{3}}$ är styckvis glatt och kontinuerlig.

Uppgift 2.

Vi Laplacetransformerar $u(x,t)$ i t-variabeln och får en funktion $U(x,z)$. Laplacetransformen av derivatan $u_t(x,t)$ är då $zU(x,z) - u(x,0) = zU(x,z) - 1$, och den transformerade ekvationen blir

$$zU(x,z) - 1 = kU_{xx}(x,z).$$

För fixt z är detta en ordinär differentialekvation i x-variabeln, linjär men inte homogen. Motsvarande homogena ekvation $zU(x,z) = kU_{xx}(x,z)$ har lösningar som är linjärkombinationer av $\exp(x\sqrt{z/k}\,)$ och $\exp(-x\sqrt{z/k}\,)$. Eftersom en partikulärlösning är $U(x,z) = 1/z$, har differentialekvationen den allmänna lösningen

$$U(x,z) = \frac{1}{z} + ae^{x\sqrt{z/k}} + be^{-x\sqrt{z/k}},$$

där $a = a(z),\ b = b(z)$. Termen med plustecken i exponenten växer orimligt snabbt för stora x och z, och förkastas, så att $a = 0$.

Randvillkoret $u(0,t) = e^{-t}$ medför att $U(0,z) = \mathcal{L}(e^{-t})$ (som är $(z+1)^{-1}$, men det behöver vi inte utnyttja). Det betyder med $x = 0$ i uttrycket för $U(x,z)$ ovan att

$$\frac{1}{z} + b(z) = \mathcal{L}(e^{-t}),$$

vilket ger $b(z)$ och därmed

$$U(x,z) = \frac{1}{z} + \left(\mathcal{L}(e^{-t}) - \frac{1}{z}\right) e^{-x\sqrt{z/k}}.$$

För att ta invers Laplacetransform av detta observerar vi (eventuellt med hjälp av BETA 13.5 rad L21) att $1/z$ är transformen av den konstanta funktionen 1. Rad L62 med $a = x/\sqrt{k}$ ger för den sista delen av sista termen ovan att

$$-\frac{1}{z}\, e^{-x\sqrt{z/k}} = -\mathcal{L}\left(\operatorname{erfc}(\frac{x}{2\sqrt{kt}})\right).$$

Eftersom också (rad L61)

$$e^{-x\sqrt{z/k}} = \mathcal{L}\left(\frac{x}{2\sqrt{\pi k t^3}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right),$$

blir den återstående kvantiteten $\mathcal{L}(e^{-t})e^{-x\sqrt{z/k}}$ en produkt av två Laplacetransformer, alltså Laplacetransformen av en faltning. Denna faltning är

$$e^{-t} * \frac{x}{2\sqrt{\pi k t^3}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} = \frac{x}{2\sqrt{\pi k}} \int_0^t e^{s-t} s^{-3/2} e^{-\frac{x^2}{4ks}}\, ds,$$

eftersom funktionerna här sätts till 0 för $t < 0$. Svaret på uppgiften är därför

$$u(x,t) = 1 - \operatorname{erfc}(\frac{x}{2\sqrt{kt}}) + \frac{x}{2\sqrt{\pi k}} \int_0^t e^{s-t} s^{-3/2} e^{-\frac{x^2}{4ks}}\, ds.$$

Uppgift 3.
Enligt satsen om bästa approximation söker vi en funktion f vars ortogonalprojektion på det vektorrum som spänns upp av funktionerna $\sin nx,\ n = 1, \ldots, 5$, är $\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n} \sin nx$. Eftersom alla funktionerna $\sin nx,\ n = 1, 2, \ldots,$ bildar ett ortogonalsystem i $(0, \pi)$, kan man som f ta exempelvis

$\sum_{n=1}^{6} \frac{1}{n} \sin nx$. En annan lösning är $f(x) = (\pi - x)/2$, som är summan av den oändliga serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx$.

Uppgift 4.
Randvillkoren i y-led är homogena, och vi kan separera variabler, dvs. söka lösningar av formen $u(x, y) = X(x)Y(y)$. På vanligt sätt får vi från differentialekvationen att

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda,$$

för någon konstant λ. Här börjar vi med att betrakta funktionen $Y(y)$, som satisfierar $Y'' = -\lambda Y$. De homogena randvillkoren medför att $Y'(0) = Y'(L) = 0$. Då vet vi att enda möjligheten är att $\lambda = (n\pi/L)^2$ och $Y(y)$ är en multipel av $\cos \frac{n\pi y}{L}$, för något $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Speciellt är Y konstant för $n = 0$.

Ekvationen $X'' = \lambda X$ ger med detta λ för $n > 0$ att $X(x)$ måste vara en linjärkombination av $\sinh \frac{n\pi x}{L}$ och $\cosh \frac{n\pi x}{L}$ eller ekvivalent av $\sinh \frac{n\pi x}{L}$ och $\sinh \frac{n\pi(\ell - x)}{L}$. Dessa senare är att föredra, eftersom de funktionerna är 0 i ändpunkterna 0 resp. ℓ. För $n = 0$ är $X'' = 0$, så X måste vara ett förstagradspolynom. Vi skriver då X som en linjärkombination av x och $\ell - x$, alltså förstagradspolynom som är 0 i endera ändpunkten.

Som separerade lösningar får vi alltså $(ax + b(\ell - x)) \cdot 1$ och

$$\left(a \sinh \frac{n\pi x}{L} + b \sinh \frac{n\pi(\ell - x)}{L} \right) \cos \frac{n\pi y}{L}$$

för $n = 1, 2, \dots$.. Vi ansätter därför

$$(2) \quad u(x, y) = a_0 x + b_0(\ell - x) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \sinh \frac{n\pi x}{L} + b_n \sinh \frac{n\pi(\ell - x)}{L} \right) \cos \frac{n\pi y}{L}.$$

Randvillkoret för $x = 0$ ger

$$b_0\ell + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh\frac{n\pi\ell}{L}\cos\frac{n\pi y}{L} = 1 + y.$$

och det för $x = \ell$

$$a_0\ell + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh\frac{n\pi\ell}{L}\cos\frac{n\pi y}{L} = y^2,$$

i båda fallen för $0 < y < L$. Vi behöver då utveckla högerleden här i cosinusserier i $[0, L]$. Från BETA 13.1 (3) med $\alpha = 1$, $h = L$ och (13) får man

$$1 + y = 1 + \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi y}{L}$$

resp.

$$y^2 = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi y}{L}.$$

Nu kan vi identifiera koefficienterna, och resultatet blir

$$b_0 = \frac{1}{\ell} + \frac{L}{2\ell},$$

$$b_{2n} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$b_{2n-1} = -\frac{4L}{\pi^2}\frac{1}{(2n-1)^2\sinh\frac{(2n-1)\pi\ell}{L}}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$a_0 = \frac{L^2}{3\ell},$$

och

$$a_n = \frac{4L^2}{\pi^2}\frac{(-1)^n}{n^2\sinh\frac{n\pi\ell}{L}}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Svaret på uppgiften blir alltså utvecklingen (2) med ovanstående koefficienter.

Uppgift 5.

Fouriertransformen av funktionen $f(x) = \sin x/x$ är enligt tabell (BETA 13.2 F53) $\hat{f}(\xi) = \pi\chi_{(-1,1)}(\xi)$. Vi ser nu

$(\sin x/x)^2$ som en produkt av två faktorer $f(x)$. Dess Fouriertransform är därför en faltning,

$$\widehat{\frac{\sin^2 x}{x^2}} = \frac{1}{2\pi}\,\pi^2\,\chi_{(-1,1)} * \chi_{(-1,1)}.$$

Här är

$$\chi_{(-1,1)} * \chi_{(-1,1)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{(-1,1)}(\eta)\,\chi_{(-1,1)}(\xi-\eta)\,d\eta.$$

Produkten i denna integral är 1 om och endast om $|\eta| < 1$ och $|\xi - \eta| < 1$, dvs. η ligger i snittet av intervallen $(-1, 1)$ och $(\xi-1, \xi+1)$, annars är den 0. Detta snitt är ett intervall med längden $2 - |\xi|$ då $|\xi| < 2$, och annars är snittet tomt (rita figur). Det följer att

$$\widehat{\frac{\sin^2 x}{x^2}}(\xi) = \frac{\pi}{2}\,(2 - |\xi|)$$

för $|\xi| \leq 2$, medan värdet är 0 för $|\xi| > 2$. Plancherels sats ger nu

(3)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}\,dx = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{\frac{\sin^2 x}{x^2}}(\xi)\right|^2 d\xi$$

$$= \frac{\pi}{16}\int_{-2}^{2} (2-|\xi|)^2\,d\xi = \frac{\pi}{8}\int_0^2 (2-\xi)^2\,d\xi = \frac{\pi}{8}\int_0^2 t^2\,dt = \frac{\pi}{3}.$$

Det näst sista steget här var förstås variabeltransformationen $t = 2 - \xi$.

Att i stället använda den inversa Fouriertransformen av $\sin^2 x/x^2$ ger helt likartade räkningar.

Uppgift 6.

Vi använder polära koordinater r, θ i stället för x, y, så att $u = u(r, \theta, t)$ och $\Delta u = u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta}$. Initialvillkoren lyder då $u(r, \theta, 0) = 0$ och $u_t(r, \theta, 0) = r\cos\theta$. Randvillkoret

$u(R_0,\theta,t)=0$ är homogent, och man kan variabelseparera:

$$u(r,\theta,t)=R(r)\Theta(\theta)T(t).$$

Vi stoppar in denna produkt i vågekvationen, dividerar med $c^2R(r)\Theta(\theta)T(t)$ och får

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}=\frac{R''}{R}+\frac{1}{r}\frac{R'}{R}+\frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta}.$$

Denna kvantitet måste vara konstant, säg λ. Då får vi $T''=c^2\lambda T$ och

$$\frac{r^2R''+rR'}{R}-\lambda r^2=-\frac{\Theta''}{\Theta}=\text{konstant}.$$

Eftersom Θ är 2π-periodisk, är denna nya konstant n^2 för något $n\in\{0,1,2,\dots\}$, och Θ är av formen

$$\Theta(\theta)=a\cos n\theta+b\sin n\theta.$$

För R har vi ekvationen

$$r^2R''+rR'-\lambda r^2R-n^2R=0,$$

och R skall uppfylla randvillkoret $R(R_0)=0$. Dessutom måste R vara begränsad vid 0.

Om $\lambda>0$, säg $\lambda=\mu^2$ där $\mu>0$, har vi den modifierade Besselekvationen, med lösningar $R(r)=\alpha I_n(\mu r)+\beta K_n(\mu r)$. Här förkastar vi K_n-termen eftersom den är obegränsad vid 0. Då återstår I_n, som emellertid inte har något nollställe på $\mathbb{R}_+$. Positiva λ ger därför inga lösningar $R(r)$.

För $\lambda=0$ får vi en Eulerekvation. Med den vanliga ansatsen $R=r^\gamma$ finner vi dess lösningar $\alpha r^n+\beta r^{-n}$ då $n>0$ och $\alpha+\beta\ln r$ då $n=0$. I båda fallen är den andra termen obegränsad vid 0 och förkastas. Den första termen skall då ha ett nollställe i R_0, vilket skulle ge $\alpha=0$. Alltså hittar vi inga lösningar för $\lambda=0$.

Om slutligen $\lambda<0$, säg $\lambda=-\mu^2$ med $\mu>0$, har vi den vanliga Besselekvationen. Dess lösningar är $R(r)=\alpha J_n(\mu r)+\beta Y_n(\mu r)$. Här förkastar vi Y_n, som är singulär vid 0. Då ger randvillkoret i R_0 att $J_n(\mu R_0)=0$, så att

$\mu = \lambda_{kn}/R_0$ för något $k = 1, 2, \ldots$, där $(\lambda_{kn})_{k=1}^{\infty}$ betecknar nollställena till J_n i $\mathbb{R}_+$. Alltså får vi lösningar $R(r) = J_n(\lambda_{kn} r/R_0)$, med $\lambda = -\lambda_{kn}^2/R_0^2$.

Ekvationen för T blir nu

$$T'' = -\frac{c^2\lambda_{kn}^2}{R_0^2}T,$$

med lösningar

$$T(t) = \alpha\cos\frac{c\lambda_{kn}}{R_0}t + \beta\sin\frac{c\lambda_{kn}}{R_0}t.$$

Initialvillkoret $u(r, \theta, 0) = 0$ gör att vi bara söker T med $T(0) = 0$. Det betyder $\alpha = 0$ och alltså

$$T(t) = \sin\frac{c\lambda_{kn}}{R_0}t,$$

där koefficienten β då inte behövs.

Vi kan nu ansätta den sökta lösningen u som en oändlig linjärkombination av de separabla lösningar vi funnit, alltså

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{R_0}r\right)(a_{kn}\cos n\theta + b_{kn}\sin n\theta)\sin\frac{c\lambda_{kn}}{R_0}t.$$

Slutligen skall vi bestämma koefficienterna så att det återstående initialvillkoret $u_t(r, \theta, 0) = r\cos\theta$ blir uppfyllt, vilket betyder

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c\lambda_{kn}}{R_0}J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{R_0}r\right)(a_{kn}\cos n\theta + b_{kn}\sin n\theta) = r\cos\theta.$$

för alla r och θ. För fixt r kan vi se vänsterledet i denna ekvation som en Fourierserie i θ-variabeln, med koefficienter för $\cos n\theta$ och $\sin n\theta$ som är

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c\lambda_{kn}}{R_0}J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{R_0}r\right)a_{kn} \quad \text{resp.} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c\lambda_{kn}}{R_0}J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{R_0}r\right)b_{kn}.$$

Högerledet består av en enda term i en Fourierserie av samma slag, nämligen cosinustermen med $n = 1$, så vi kan identifiera koefficienter. Sinustermer saknas i högerledet, så

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c\lambda_{kn}}{R_0} J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{R_0} r\right) b_{kn} = 0,$$

för $n = 0, 1, \ldots$. Detta gäller för varje r i intervallet $(0, R_0)$, och där bildar $J_1(\lambda_{k1} r/R_0), \quad k = 1, 2, \ldots$, ett fullständigt ortogonalsystem, med vikten r. Det följer att alla $b_{kn} = 0$. På samma sätt får vi för $n \neq 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c\lambda_{kn}}{R_0} J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{R_0} r\right) a_{kn} = 0,$$

så att $a_{kn} = 0$ för $n \neq 1$ och alla k. För $n = 1$ gäller

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{k1} \frac{c\lambda_{k1}}{R_0} J_1\left(\frac{\lambda_{k1}}{R_0} r\right) = r,$$

för $0 < r < R_0$. Koefficienterna a_{k1} ges därför av

$$a_{k1} \frac{c\lambda_{k1}}{R_0} = \frac{1}{\|J_1(\lambda_{k1} r/R_0)\|_r^2} \int_0^{R_0} r J_1\left(\frac{\lambda_{k1}}{R_0} r\right) r\, dr.$$

Enligt tabell är

$$\|J_1(\lambda_{k1} r/R_0)\|_r^2 = \frac{R_0^2 J_2(\lambda_{k1})^2}{2}.$$

Man kan stanna här och behålla integralen i uttrycket för koefficienterna. Men med tabell och variabeltransformationen $s = \lambda_{k1} r/R_0$ går det att beräkna integralen:

$$\int_0^{R_0} r J_1\left(\frac{\lambda_{k1}}{R_0} r\right) r\, dr = \frac{R_0^3 J_2(\lambda_{k1})}{\lambda_{k1}}.$$

Detta ger

$$a_{k1} = \frac{2R_0^2}{c\lambda_{k1}^2 J_2(\lambda_{k1})}.$$

Med dessa a_{k1} är alltså den sökta lösningen

$$u(r, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k1} J_1\left(\frac{\lambda_{k1}}{R_0} r\right) \cos\theta \, \sin\frac{c\lambda_{k1}}{R_0} t.$$