MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Datum: 2012-08-20
Telefon: Richard Lärkäng
0703-088304
Skrivtid: 8.30 – 13.30

Tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2 och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Hjälpmedel: Godkänd räknedosa, BETA samt "Några tips om Fourierserier m.m. i BETA" (två sidor).
Maxpoäng står inom parentes efter varje uppgift, med summa 50.
Betygsgränser: Betyg 3: 25, betyg 4: 33, betyg 5: 42.
Svar i form av svårberäknade integraluttryck kan i vissa fall accepteras eller åtminstone ge poäng.

1. Lös följande problem, där $k > 0$ är en konstant:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} + x, & 0 < x < 1, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \sin 2\pi x, & 0 < x < 1. \end{cases} \qquad (8)$$

2. Beräkna

$$\sum_1^\infty \frac{1}{(n^2 - 0.7)^2},$$

exempelvis med hjälp av en lämplig Fourierserie. (8)

3. Bestäm en lösning $u = u(x,t)$ till den inhomogena vågekvationen $u_{tt} = c^2 u_{xx} + x^2$ i halvplanet $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, med de homogena initialvillkoren $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$. Här är $c > 0$ en konstant. (8)

4. Anta $\hat{f}(\xi) = \frac{\xi}{(1+\xi^2)^2}$ för $\xi > 1$ och $\hat{f}(\xi) = 0$ för övriga ξ. Beräkna $f'(0)$ samt integralerna $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx$ och $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2 \, dx$.
Ledning för den sistnämnda integralen: Den kan uttryckas i termer av Fouriertransformen av f^2, och denna Fouriertransform kan skrivas som en faltning. (3+2+3)

5. Lös värmeledningsekvationen $u_t = k\Delta u$ i en skiva $r < R_0$. Här är $k > 0$ och $u = u(r, \theta, t)$, där (r, θ) betecknar polära koordinater. Randvillkoret är $u(R_0, \theta, t) = 0$ och initialvillkoret $u(r, \theta, 0) = (R_0 - r)\sin\theta$. (8)

6. Definiera ett lågpassfilter, med konstant (kallad gränsvinkelfrekvens) $\alpha > 0$, och ge en formulering av samplingssatsen i termer av ett sådant filter. (3+2)

7. Låt L vara en linjär, andra ordningens ordinär differentialoperator i intervallet $[a, b]$. Vad innebär det att L är formellt självadjungerad? Vad medför detta för relation mellan skalärprodukter av typ $\langle Lf, g\rangle$? (3+2)