MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers Datum: 2013-01-15

# LÖSNINGAR TILL tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2 och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Uppgift 1.
Vi vill använda Plancherels formel, och observerar att $e^{-|\xi|}$ är Fouriertransformen av funktionen $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, enligt BETA 13.2 F41b. Då ger Plancherel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{-|\xi|}\, d\xi = \frac{2\pi}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{1}{1+x^2}\, dx = 2\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x^2(1+x^2)}\, dx.$$

Den sista integranden partialbråksuppdelar vi och får

$$2\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x^2(1+x^2)}\, dx = 2\int_{2}^{\infty}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$
$$= 2\left[-\frac{1}{x} - \arctan x\right]_2^{\infty} = 1 - \pi + 2\arctan 2.$$

Denna primitiva funktion kan man också hitta i BETA 7.4, 71. Svaret blir alltså $1 - \pi + 2\arctan 2 \approx 0.0727$.

Uppgift 2.
Detta är värmeledningsekvationen med homogena randvillkor, så man kan variabelseparera direkt. Därför söker vi de separerade lösningarna $X(x)T(t)$ till värmeledningsekvationen med randvillkoren. Som vanligt får man att

$$\frac{1}{k}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

måste vara konstant, och randvillkoren ger $X(0) = 0$ och $X'(\ell) = 0$.

Om $\lambda > 0$, säg $\lambda = \mu^2$, ger $X''(x) = \mu^2 X(x)$ att $X(x) = a\cosh \mu x + b\sinh \mu x$. Men randvillkoren leder då till $a = 0$ och $b = 0$, så detta fall ger inget utöver nollösningen. Om $\lambda = 0$, får vi $X(x) = a + bx$ som kan avfärdas på samma sätt. Då återstår fallet $\lambda = -\mu^2 < 0$, där vi tar $\mu > 0$. Man får $X(x) = a\cos\mu x + b\sin\mu x$ och randvillkoren ger att $a = 0$ och att $b\mu\cos\mu\ell = 0$. Det följer att $\mu = (n-\frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}$ för något $n \in \{1, 2, \dots\}$.

Ekvationen för $T$ är $T'(t) = k\lambda T(t)$, och eftersom $\lambda = -\mu^2$ blir $T(t)$ proportionell mot $\exp\left(-k\left((n-\frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}\right)^2 t\right)$.

De separerade lösningarna är alltså multipler av

$$\sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{\ell}\, e^{-k\left((n-\frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}\right)^2 t}, \qquad n = 1, 2, \dots.$$

För att finna en lösning till hela det givna problemet ansätter vi en summa av separerade lösningar:

$$u(x,t) = \sum_1^\infty a_n \sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{\ell}\, e^{-k\left((n-\frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}\right)^2 t}. \tag{1}$$

Initialvillkoret leder då till

$$\sum_1^\infty a_n \sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{\ell} = x, \qquad 0 < x < \pi.$$

Vi vet att sinusfunktionerna i denna summa bildar ett fullständigt ortogonalsystem på intervallet $(0, \pi)$, eftersom de är egenfunktionerna till ett reguljärt Sturm-Liouville-problem. Deras $L^2$-normer är kvadratroten ur

$$\int_0^\ell \sin^2\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{\ell}\, dx = \frac{\ell}{2}.$$

Därför ges koefficienterna av

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\ell}\int_0^\ell x\sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{\ell}\, dx = \big[\text{partialintegration}\big] \\
&= \frac{2}{\ell}\left[-x\frac{\cos\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{\ell}}{(n-\frac{1}{2})\pi/\ell}\right]_0^\ell + \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \frac{\cos\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{\ell}}{(n-\frac{1}{2})\pi/\ell}\, dx \\
&= 0 + \frac{2}{\ell}\frac{1}{((n-\frac{1}{2})\pi/\ell)^2}\left[\sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{\ell}\right]_0^\ell \\
&= \frac{8\ell(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\pi^2}.
\end{aligned}$$

Varning: BETA 13.1 (12) ger en utveckling av funktionen $x$ i sinusserie, nämligen

$$x = \frac{2L}{\pi} \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{L}, \qquad |x| < L.$$

Om man här sätter $L = 2\ell$, får man en utveckling som liknar den vi söker. Men eftersom vi skall ha $(2n-1)\pi/(2\ell)$ som argument för sinusfunktionen, dvs. bara udda $n$-värden i ovanstående formel, kan vi *inte* använda detta för att finna koefficienterna $a_n$.

Däremot går det att få fram $a_n$ genom att manipulera med serien för $f_2(x) = |x|$, men ovanstående räkning är nog enklare.

Svaret på uppgiften är (1) med $a_n$ som ovan.

Uppgift 3.
Genom transformationen $t = x\sqrt{2}$ blir problemet i stället att minimera

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| 2^{-1/4}\sqrt{|t|} - Q(t) \right|^2 e^{-t^2}\, dt,$$

där $Q(t) = P(x) = P(t/\sqrt{2})$ liksom $P$ är ett polynom av grad högst 3. Fördelen med denna omskrivning är att vi får vikten $e^{-t^2}$, och vi vet att Hermitepolynomen $(H_n)_0^\infty$ bildar en ortogonalbas i $L^2$ med denna vikt. Satsen om bästa approximation säger därför att

$$Q(t) = \sum_0^3 c_n H_n(t),$$

där

$$c_n = \frac{1}{\|H_n\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-1/4}\sqrt{|t|} H_n(t) e^{-t^2}\, dt,$$

med normen tagen i det viktade $L^2$-rummet. Enligt BETA 12.2 sidan 266 är $\|H_n\|^2 = n! 2^n \sqrt{\pi}$. Eftersom $H_n$ har samma paritet (udda – jämnt) som $n$, ser vi att $c_n$ blir 0 för udda $n$. Vi har alltså bara $c_0$ och $c_2$ att räkna ut. Eftersom $H_0 = 1$ får man

$$c_0 = \frac{2^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{|t|} e^{-t^2}\, dt = \frac{2^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} 2 \int_0^{\infty} \sqrt{t} e^{-t^2}\, dt.$$

Den sista integralen här kan man hitta i BETA 7.5 (42) (där behöver parametern $n$ inte vara heltal):

$$\int_0^{\infty} \sqrt{t} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right).$$

Det är inte överraskande att $\Gamma$-funktionen dyker upp här, för ett alternativ är att variabeltransformera $s = t^2$ och komma till den integral som definierar $\Gamma$-funktionen. Alltså är

$$c_0 = \frac{2^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right).$$

Enligt tabellen är $H_2(t) = 4t^2 - 2$, så

$$c_2 = \frac{2^{-1/4}}{8\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{|t|}(4t^2-2) e^{-t^2}\, dt = \frac{2^{-1/4}}{4\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{t}(4t^2-2) e^{-t^2}\, dt.$$

Samma tabellrad som nyss ger att

$$c_2 = \frac{2^{-1/4}}{4\sqrt{\pi}} \left(2\Gamma\left(\frac{7}{4}\right) - \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right).$$

För att hyfsa detta kan man utnyttja rekursionsformeln för $\Gamma$-funktionen, som ger att $\Gamma\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$. Då fås

$$c_2 = \frac{2^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \frac{1}{8}.$$

Om man nu stoppar in uttrycken för $c_n$ och $H_n$ i formeln för $Q$, får man

$$Q(t) = \frac{2^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{t^2}{2} + \frac{3}{4}\right).$$

Det återstår bara att transformera tillbaks till $x$ för att få det sökta polynomet $P$:

$$P(x) = Q(x\sqrt{2}) = \frac{2^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \left(x^2 + \frac{3}{4}\right).$$

Uppgift 4.
Både differentialekvationen och randvillkoren är homogena, så det är bäddat för variabelseparation. Om $u(x,t) = X(x)T(t)$ får man på vanligt sätt att

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x) - 4X'(x)}{X(x)}$$

och denna kvantitet måste vara konstant, säg $\lambda$. För $X$ har man alltså den ordinära, linjära differentialekvationen $X''(x) - 4X'(x) - \lambda X(x) = 0$, vars karakteristiska ekvation $r^2 - 4r - \lambda = 0$ har lösningar $r = 2 \pm \sqrt{4+\lambda}$. Randvillkoren ger att $X(0) = 0$ och $X(\pi) = 0$. Lösningarnas utseende beror av vilket tecken $4 + \lambda$ har.

Om $4 + \lambda > 0$, säg $4 + \lambda = \mu^2$ med $\mu > 0$, blir lösningarna till den ordinära differentialekvationen $X(x) = ae^{(2+\mu)x} + be^{(2-\mu)x}$. Randvillkoren innebär då att $a + b = 0$ och $ae^{(2+\mu)\pi} + be^{(2-\mu)\pi} = 0$, vilket, som man lätt ser, medför $a = b = 0$. (Detta blir en aning enklare om man skriver lösningarna som $e^{2x}(a' \cosh \mu x + b' \sinh \mu x)$.) Vi får alltså bara den ointressanta nollösningen i detta fall.

Om $4 + \lambda = 0$ har den karakteristiska ekvationen dubbelrot, och den ordinära differentialekvationen har lösningarna $X(x) = ae^{2x} + bxe^{2x}$. Då medför randvillkoren igen att $a = b = 0$.

Om slutligen $4 + \lambda < 0$, sätter vi $4 + \lambda = -\mu^2$ där $\mu > 0$. Den ordinära differentialekvationen löses nu av $X(x) = e^{2x}(a \cos \mu x + b \sin \mu x)$, och randvillkoren ger $a = 0$ och, eftersom både $a$ och $b$ inte får vara 0, också $\sin \mu\pi = 0$. Därför måste $\mu$ vara heltal, så att $\mu \in \{1, 2, \ldots\}$.

För $T$ har vi ekvationen $T''(t) = \lambda T(t)$, dvs. $T''(t) = -(4 + \mu^2)T(t)$, med lösningar

$$T(t) = \alpha \cos \sqrt{4+\mu^2}\, t + \beta \sin \sqrt{4+\mu^2}\, t.$$

Vi har därmed funnit de separabla lösningarna

$$e^{2x} \sin \mu x \left( \alpha \cos x \sqrt{4+\mu^2}\, t + \beta \sin \sqrt{4+\mu^2}\, t \right), \quad \mu = 1, 2, \ldots.$$

För den sökta funktionen $u$ blir ansatsen

$$(2)\quad u(x,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} e^{2x}\sin\mu x\left(\alpha_\mu\cos\sqrt{4+\mu^2}\,t+\beta_\mu\sin\sqrt{4+\mu^2}\,t\right).$$

Nu utnyttjar vi initialvillkoren, som ger

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\alpha_\mu\, e^{2x}\sin\mu x = 1$$

och

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\sqrt{4+\mu^2}\,\beta_\mu e^{2x}\sin\mu x = 0,$$

bådadera för alla $0 < x < \pi$. Detta är Fourierserieutvecklingar, och vi ser genast att alla $\beta_\mu$ måste vara 0 och att $\alpha_\mu$ är koefficienterna för funktionen $e^{-2x}$, utvecklad i sinusserie i $(0,\pi)$. Därför är

$$\begin{aligned}
\alpha_\mu &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{-2x}\sin\mu x\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\int_0^\pi e^{(-2+i\mu)x}\,dx = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\frac{(-1)^\mu e^{-2\pi}-1}{-2+i\mu} \\
&= \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\frac{((-1)^\mu e^{-2\pi}-1)(-2-i\mu)}{4+\mu^2} = \frac{2\mu}{\pi}\,\frac{(1-(-1)^\mu e^{-2\pi})}{4+\mu^2}.
\end{aligned}$$

Lösningen vi söker blir alltså (2) med dessa $\alpha_\mu$.

*Anm.* Ett annat sätt att räkna ut $\alpha_\mu$ är att partialintegrera två gånger. Då kommer man tillbaka till integralen man startade med, med en koefficient $\neq 1$. Men det enklaste är att hitta den primitiva funktionen i BETA 7.4 330.

Uppgift 5.
Vi utgår från formeln

$$e^{ix\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)e^{in\varphi},$$

se BETA 12.4 sidan 274. Den gäller för $x > 0$ och alla reella $\varphi$. För varje fixt $x$ är högerledet en Fourierserie, som måste vara den komplexa Fourierserien för funktionen $\varphi \mapsto e^{ix\sin\varphi}$ i vänsterledet. Därför ges koefficienterna $J_n(x)$ av den vanliga formeln

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\varphi}e^{-in\varphi}\,d\varphi. \tag{3}$$

Denna formel kan man också få från sidan 270 i BETA 12.4. I den givna integralen gör vi omskrivningen

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{2i\varphi} - \frac{1}{4}e^{-2i\varphi}.$$

Den givna integralen kan därför fås med hjälp av tre integraler av typ (3), utom att vi har ett minustecken i exponenten framför $ix\sin\varphi$. Men det minustecknet ändrar bara tecknet framför integralens imaginärdel som är

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x\sin\varphi)\sin^2\varphi\,d\varphi,$$

och detta är 0 eftersom integranden här är udda. Det betyder att minustecknet i exponenten inte har någon betydelse och kan strykas. Därför ger (3)

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\sin\varphi}\sin^2\varphi\,d\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\varphi}\,d\varphi - \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\varphi}e^{2i\varphi}\,d\varphi - \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\varphi}e^{-2i\varphi}\,d\varphi \\
&\qquad = \pi J_0(x) - \frac{\pi}{2}\,J_{-2}(x) - \frac{\pi}{2}\,J_2(x).
\end{aligned}$$

Men $J_{-2}(x) = J_2(x)$, se BETA 12.4 sidan 270, så

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\sin\varphi}\sin^2\varphi\,d\varphi = \pi J_0(x) - \pi J_2(x),$$

som är svaret.

En liten variant av ovanstående är att skriva om Fourierserien för $e^{ix\sin\varphi}$ som en sinus-cosinus-serie, och sen arbeta med sådana serier.

Uppgift 6.
Högerledet 1 gör ekvationen $\Delta u = 1$ inhomogen. Eftersom 1 är oberoende av båda variablerna, kan man använda steady state-metoden, alltså först finna en lösning $u_0$ till ekvationen som är oberoende av den ena variabeln. Den "ena variabeln" brukar vara tiden $t$, därav uttrycket. Men i detta fall kan vi välja $x$ eller $y$. Vi väljer $x$, så att $u_0$ blir en funktion av enbart $y$. Det ger ekvationen $u_0''(y) = 1$, med lösningar $u_0(y) = y^2/2 + ay + b$.

I allmänhet vill man också att en sådan steady-state-lösning $u_0(y)$ skall uppfylla randvillkoren i ändpunkterna av $y$-intervallet. Här kan vi klara det ena, $u_0(0) = 1$, genom att välja $b = 1$, men att få $u_0(\ell) = x$ för alla $0 < x < L$ går förstås inte. Lägg också märke till att $x$-derivatan $(u_0)_x$ är 0, så att varje sådan lösning uppfyller randvillkoren för $x = 0$ och $x = L$. För koefficienten $a$ har vi fritt val och väljer enklast $a = 0$, så att $u_0(y) = y^2/2 + 1$.

För $v(x,y) = u(x,y) - u_0(y)$ får vi

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & 0 < x < L,\ 0 < y < \ell, \\ v(x,0) = 0,\ \ v(x,\ell) = x - \ell^2/2 - 1, & 0 < x < L, \\ v_x(0,y) = 0,\ \ v_x(L,y) = 0, & 0 < y < \ell. \end{cases}$$

Nu har vi ett standardproblem, en homogen ekvation med homogena randvillkor för $x = 0$ och $x = L$. Därför separerar vi variablerna och söker lösningar av formen $v(x,y) = X(x)Y(y)$, vilket som vanligt ger

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda,$$

för någon konstant $\lambda$. De homogena randvillkoren gör att vi börjar med $X$, och vi får ekvationen $X''(x) = \lambda X(x)$ med $X'(0) = X'(L) = 0$. I denna välkända situation vet vi att enda möjligheten är att $\lambda = -(n\pi/L)^2$ och $X(x)$ är en multipel av $\cos\frac{n\pi x}{L}$, för något $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Ekvationen för $Y(y)$ blir då $Y''(y) = (n\pi/L)^2 Y(y)$. För $n > 0$ måste därför $Y(y)$ vara en linjärkombination av $\sinh\frac{n\pi y}{L}$ och $\cosh\frac{n\pi y}{L}$. Randvillkoret $v(x,0) = 0$ ger $Y(0) = 0$, så någon cosh-term finns inte. För $n = 0$ får vi i stället att $Y$ måste vara ett förstagradspolynom, och på grund av samma randvillkor i själva verket en multipel av $y$.

Som separerade lösningar får vi alltså $1 \cdot y$ och $\cos \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi y}{L}$, $n = 1, 2, \ldots$.. Vi ansätter därför

$$v(x, y) = b_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi y}{L}.$$

Det återstående randvillkoret $v(x, \ell) = x - \ell^2/2 - 1$ säger då att

$$b_0 \ell + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi \ell}{L} = x - \frac{\ell^2}{2} - 1.$$

Vi utvecklar därför funktionen $x$ i cosinusserie i intervallet $(0, L)$. BETA 13.1 (3) med $\alpha = 1$ och $h = 1$ ger

$$x = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{L}.$$

Det återstår bara att identifiera koefficienter. För den konstanta termen får man $b_0 \ell = L/2 - \ell^2/2 - 1$, dvs.

$$b_0 = \frac{L-2}{2\ell} - \frac{\ell}{2}.$$

För $n \geq 1$ blir $b_{2n} = 0$ och

$$b_{2n-1} = -\frac{4L}{\pi^2} \frac{1}{(2n-1)^2 \sinh \frac{(2n-1)\pi \ell}{L}}.$$

Vi kan sammanfatta i en formel för den sökta lösningen $u = v + u_0$:

$$u(x, y) =$$

$$\frac{y^2}{2} + \left( \frac{L-2}{2\ell} - \frac{\ell}{2} \right) y + 1 - \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n-1)\pi x}{L} \sinh \frac{(2n-1)\pi y}{L}}{(2n-1)^2 \sinh \frac{(2n-1)\pi \ell}{L}}.$$