MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Datum: 2013-03-15
Telefon: Elin Solberg
0703-088304
Skrivtid: 8.30 - 13.30

**Tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2
och Fouriermetoder MVE290 för TM2**

Hjälpmedel: Godkänd räknedosa, BETA samt “Några tips om Fourierserier m.m. i BETA” (två sidor).
Maxpoäng står inom parentes efter varje uppgift, med summa 62.

1. Bestäm en lösning $u = u(x,t)$ till den inhomogena värmeledningsekvationen
$$u_t - ku_{xx} = x$$
för $0 < x < \ell,\ \ t > 0$ med villkoren $u(0,t) = 0$ och $u(\ell,t) = 1$ för $t > 0$ samt $u(x,0) = 0$ för $0 < x < \ell$. Här är $k > 0$ en konstant. (8)

2. Ett linjärt, tidsinvariant dynamiskt system svarar med utsignalen $i\omega e^{-\omega^2+i\omega t}$ på insignalen $e^{i\omega t}$, för varje $\omega \in \mathbb{R}$.
(a) Vad är impulssvaret?
(b) Är systemet kausalt?
(c) Vad blir svaret på insignalen $\chi_{(-3,3)}$, alltså på den signal som tar värdet 1 mellan -3 och 3 och värdet 0 i andra punkter? (4+2+2)

3. Lös vågekvationen $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ i området $x > 0,\ t > 0$ med randvärden $u(0,t) = t^3$ och initialvillkor $u(x,0) = 0$ samt $u_t(x,0) = 0$. Här är $c > 0$ en konstant. (8)

4. Betrakta Sturm-Liouville-problemet
$$(x^2 f')' - f + \lambda f = 0$$
i intervallet $[1,2]$ med randvillkoren $f(1) = 0$ och $f'(2) = 0$. Bestäm problemets egenfunktioner. (9)

5. Beräkna för en konstant b med $0 < b < \pi$ summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 bn}{n^2},$$

förslagsvis med hjälp av Fourierserier. (8)

6. Bestäm en lösning $u = u(x, y, z)$ till Dirichlets problem $\Delta u = 0$ i den cylinder som definieras av $x^2 + y^2 < R_0^2,\ 0 < z < \ell$, med randvärdena $u(x, y, 0) = 0$ och $u(x, y, \ell) = x + y$ samt $u(x, y, z) = 0$ för $x^2 + y^2 = R_0^2$. Svaret får innehålla svårberäknade integraler. (9)

7. Formulera och bevisa ortogonalitetsrelationen mellan två olika Hermitepolynom. (6)

8. Beskriv hur Fouriertransformen kan approximeras med den diskreta Fouriertransformen, för en lämplig funktion. Beskriv också hur Fouriers inversionsformel approximeras av inversionsformeln för den diskreta Fouriertransformen. Det är valfritt att använda kursbokens definition av den diskreta Fouriertransformen eller den något avvikande i BETA. (3+3)