MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers
Datum: 2013-03-15

LÖSNINGAR TILL tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2 och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Uppgift 1.
Det finns två inhomogeniteter i problemet, termen x i ekvationen och randvärdet 1 för $x = \ell$. Eftersom båda är oberoende av t, kan steady state-metoden användas. Den innebär att man bestämmer en funktion $u_0(x)$ av enbart x som skall uppfylla både ekvationen och de givna randvillkoren för $x = 0$ och $x = \ell$. Det betyder

$$-ku_0''(x) = x \quad \text{och} \quad u_0(0) = 0 \quad \text{och} \quad u_0(\ell) = 1.$$

Två integrationer ger att $u_0(x) = -x^3/6k + ax + b$, och randvillkoren medför $b = 0$ och $a = \ell^{-1} + \ell^2/6k$. Alltså är

$$u_0(x) = \left(\frac{1}{\ell} + \frac{\ell^2}{6k}\right) x - \frac{1}{6k}\, x^3.$$

Vi söker nu en lösning till problemet av formen $u(x,t) = v(x,t) + u_0(x)$. Instoppat i ekvationen ger det

$$v_t(x,t) + 0 - kv_{xx}(x,t) - ku_0''(x) = x,$$

och för v får vi därför den homogena värmeledningsekvationen $v_t(x,t) - kv_{xx}(x,t) = 0$. Randvillkoren för v blir också homogena, $v(0,t) = 0$ och $v(\ell,t) = 0$. Initialvillkoret blir $v(x,0) = -u_0(x)$. För v har vi nu ett standardproblem för variabelseparation, och vi vet att de separabla lösningarna till ekvationen med randvillkoren är

$$\sin\frac{n\pi x}{\ell}\, e^{-k\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Ansatsen blir därför

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\, e^{-k\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t},$$

och initialvillkoret medför att

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} = \frac{1}{6k}\,x^3 - \left(\frac{1}{\ell} + \frac{\ell^2}{6k}\right)x, \qquad 0 < x < \ell.$$

Vi behöver alltså utveckla funktionerna x^3 och x i sinusserie i intervallet, och det gör vi med hjälp av BETA 13.1 (14) och (12), med $L = \ell$. Detta ger efter lite förenklingar

$$b_n = \frac{2(-1)^n}{\pi}\left(\frac{1}{n} + \frac{\ell^3}{\pi^2 k n^3}\right).$$

Resultatet av det hela blir

$$u(x,t) = \left(\frac{1}{\ell} + \frac{\ell^2}{6k}\right)x - \frac{1}{6k}\,x^3 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\, e^{-k\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}$$

med dessa b_n.

Anm. 1 De givna randvärdena har en diskontinuitet i hörnet $(1,0)$. I den punkten kan man därför inte vänta sig att lösningen skall ha något gränsvärde.

Anm. 2 Att i stället angripa problemet genom att Laplacetransformera i t-variabeln är inte att rekommendera, eftersom det leder till en besvärlig invers Laplacetransform.

Uppgift 2.
(a) Om h är systemets impulssvar, är svaret på insignalen $e^{i\omega t}$ alltid $\hat{h}(\omega)e^{i\omega t}$. I vårt fall ger detta $\hat{h}(\omega) = i\omega e^{-\omega^2}$. För att finna den inversa Fouriertransformen av detta uttryck observerar vi att $e^{-\omega^2}$ är Fouriertransformen av $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-t^2/4}$. Därför är

$$h(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{d}{dt}e^{-t^2/4} = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\,te^{-t^2/4},$$

som alltså är svaret på fråga (a).

Anm. Ofta räknar man ut systemfunktionen $\hat{h}$ som kvoten mellan *Fouriertransformerna* av en utsignal och motsvarande insignal. Men här går detta inte bra, eftersom Fouriertransformen av insignalen $e^{i\omega t}$ måste tas i distributionsmening och blir en punktmassa.

(b) Impulssvaret är inte 0 på vänstra halvaxeln, så systemet är inte kausalt.

(c) Insignalen $\chi_{(-3,3)}$ ger utsignalen

$$h * \chi_{(-3,3)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)\chi_{(-3,3)}(t-s)\,ds$$
$$= -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{t-3}^{t+3} s e^{-s^2/4}\,ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,(e^{-(t+3)^2/4} - e^{-(t-3)^2/4})$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-9/4}\,e^{-t^2/4}\sinh\frac{3t}{2}.$$

Uppgift 3.
Här kan man lämpligen Laplacetransformera i t-variabeln, i synnerhet som initialvillkoren är homogena. Då kommer $U(x,z) = \mathcal{L}u(x,z)$ att uppfylla ekvationen $z^2U(x,z) - zu(x,0) - u_t(x,0) = c^2U_{xx}(x,z)$, och alltså

$$z^2U(x,z) = c^2U_{xx}(x,z).$$

För fixt z får vi

$$U(x,z) = A(z)\exp\left(\frac{zx}{c}\right) + B(z)\exp\left(-\frac{zx}{c}\right),$$

där A och B beror av z men inte av x. Den första termen här har ett alltför snabbt växande då x växer och förkastas. Randvillkoret ger att $U(0,z) = \mathcal{L}t^3 = 6z^{-4}$, det sista enligt BETA 13.5 L20. Vi får alltså för $x = 0$ att $B(z) = 6z^{-4}$ och därmed

$$U(x,z) = 6z^{-4}\exp\left(-\frac{zx}{c}\right).$$

För att hitta u, som är inversa Laplacetransformen till detta uttryck, fixerar vi x och observerar att $6z^{-4}$ är Laplacetransformen av funktionen t^3. Effekten av faktorn $\exp(-zx/c)$

är att denna funktion translateras, enligt regeln i BETA 13.5 L4. Den inversa Laplacetransformen av $U(x,z)$ är därför $(t-x/c)^3$, men här är det viktigt att funktionen t^3 skall tolkas som 0 för negativa argument. Svaret blir alltså

$$u(x,t) = \begin{cases} (t-x/c)^3, & \text{om } t > x/c \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Detta kan också skrivas som $u(x,t) = (t-x/c)^3\theta(t-x/c)$ med Heavisidefunktionen θ. Se gärna efter i ett diagram var de olika uttrycken för $u(x,t)$ gäller. Lägg märke till att vi egentligen inte behövde Laplacetransformen $6z^{-4}$, det hade räckt att skriva $\mathcal{L}t^3$.

Uppgift 4.
Koefficienten x^2 framför f' är positiv i intervallet, och vikten är 1. De givna randvillkoren är separerade och därmed självadjungerade, så vi har ett reguljärt Sturm-Liouville-problem. Ekvationen kan skrivas

$$x^2 f'' + 2xf' - f + \lambda f = 0,$$

och är alltså en Eulerekvation. För att finna den allmänna lösningen ansätter vi $f(x) = x^\gamma$. Det leder till ekvationen $\gamma(\gamma-1) + 2\gamma - 1 + \lambda = 0$, med lösningar

$$\gamma = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} - \lambda}.$$

Vi delar in i fall enligt tecknet på det som här står under rottecknet.

Om $5/4 - \lambda > 0$, skriver vi $5/4 - \lambda = \mu^2$ med $\mu > 0$ så att $\gamma = -1/2 \pm \mu$. Den allmänna lösningen till differentialekvationen blir då

$$f(x) = a\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,x^{\mu} + b\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,x^{-\mu}.$$

Randvillkoret i punkten 1 ger att $a+b=0$, så att lösningen är proportionell mot $\frac{1}{\sqrt{x}}(x^\mu - x^{-\mu}) = \frac{1}{\sqrt{x}}(e^{\mu\ln x} - e^{-\mu\ln x})$ och alltså mot $\frac{1}{\sqrt{x}}\sinh(\mu\ln x)$. Detta deriveras, och man ser att randvillkoret i punkten 2 ger att

$$-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\sinh(\mu\ln x)+\frac{\mu}{x\sqrt{x}}\cosh(\mu\ln x)=0$$

skall gälla för $x=2$. Härav fås

$$\tanh(\mu\ln 2)=2\mu.$$

En skiss av graferna för de båda leden i denna ekvation, som funktioner av μ, visar att kurvorna skär varandra i origo. Men för $\mu>0$ har de ingen skärningspunkt, eftersom derivatan av vänsterledet är $\ln 2/\cosh^2(\mu\ln 2)$ som är avtagande i $\mu>0$ och i 0 tar värdet $\ln 2$, vilket ligger under det konstanta värdet 2 av högerledets derivata. Ekvationen har alltså inga positiva lösningar, och därför finns inga egenvärden med $5/4-\lambda>0$.

Om $\lambda=5/4$, har andragradsekvationen för γ dubbelrot $-1/2$. Därför är den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$f(x)=a\,\frac{1}{\sqrt{x}}+b\,\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x.$$

Randvillkoren medför $a=0$ och $-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln 2+\frac{1}{2\sqrt{2}}=0$, dvs. $\ln 2=2$ som är falskt. Alltså är $5/4$ inget egenvärde.

Om $5/4-\lambda<0$, sätter vi $5/4-\lambda=-\mu^2$ med $\mu>0$. Den allmänna lösningen kan nu skrivas

$$f(x)=a\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,x^{i\mu}+b\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,x^{-i\mu},$$

Randvillkoret i punkten 1 medför som nyss att $a+b=0$, så att lösningen är proportionell mot $\frac{1}{\sqrt{x}}(e^{i\mu\ln x}-e^{-i\mu\ln x})$ och alltså mot $\frac{1}{\sqrt{x}}\sinh(\mu\ln x)$. Det andra randvillkoret ger

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\sin(\mu\ln 2)+\frac{\mu}{2\sqrt{2}}\cos(\mu\ln 2)=0,$$

vilket betyder

$$\tan(\mu\ln 2)=2\mu.$$

Som i första fallet skissar man graferna av de båda leden i denna ekvation. Det framgår att ekvationen har en växande följd av positiva lösningar μ_k, $k = 1, 2, \ldots$, och vi får alltså en följd av egenvärden $\lambda_k = 5/4 + \mu_k^2$. De sökta egenfunktionerna är då

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\mu_k \ln x), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

med dessa μ_k.

Uppgift 5.
Det enklaste är nog att försöka se serien som Fourierserien för någon funktion, med hjälp av tabell. I BETA 13.1 (22) ser vi att funktionen

$$f(t) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi t}{2} + \frac{t^2}{4}$$

har Fourierserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2}$$

i intervallet $0 < t < 2\pi$. Den givna summan kan skrivas som

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 bn}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos 2bn}{n^2} = \frac{1}{2}(f(0) - f(2b)),$$

det sista förutsatt att Fourierserien för f konvergerar mot f i punkterna 0 och $2b$.

För att verifiera denna konvergens tänker vi oss en fortsättning av f till en 2π-periodisk funktion på hela linjen. Eftersom f är deriverbar i $[0, 2\pi]$ och tar värdet $\pi^2/6$ både i 0 och i 2π, blir denna fortsättning styckvis glatt och kontinuerlig. Därför konvergerar Fourierserien mot f i alla punkter. Den sökta summan är alltså

$$\frac{1}{2}(f(0) - f(2b)) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{6} + \pi b - b^2\right) = \frac{(\pi - b)b}{2}.$$

En alternativ metod går ut på att tillämpa Parsevals ekvation på en funktion vars Fourierkoefficienter är (proportionella mot) $\pm \sin bn/n$. BETA 13.1 (1) med $L = \pi$ och $h = 1$ ger att den 2π-periodiska funktion $g(t)$ som tar värdet 1 för $|t| < \alpha\pi$ och är 0 i resten av intervallet $[-\pi, \pi]$ har Fourierserien

$$\alpha + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi\alpha}{n} \cos nt.$$

Här är $0 < \alpha < 1$, och vi väljer $\alpha = b/\pi$. Parsevals ekvation ger nu

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 \, dt = 2\pi\alpha^2 + \pi \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\pi\alpha}{n^2} = \frac{2b^2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 bn}{n^2}.$$

Eftersom vänsterledet här är $2b$, får man även på detta sätt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 bn}{n^2} = \frac{(\pi - b)b}{2}.$$

Anm. Det fungerar *inte* att använda Parsevals ekvation på Fourierserier som

$$\frac{\pi - t}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}.$$

Här är ju koefficienterna $1/n$, så man får inte den sökta serien.

Uppgift 6.
Vi använder cylindriska koordinater (r, θ, z) och observerar att randvillkoret för $z = \ell$ då skrivs $u(r, \theta, \ell) = r\cos\theta + r\sin\theta$. Först söker vi de separerade lösningarna

$$u = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$$

till differentialekvationen med randvillkoret för $r = R_0$, som ger $R(R_0) = 0$. Eftersom Δu uttryckt i dessa koordinater blir $u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} + u_{zz}$, får man

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{Z''}{Z} = 0.$$

Genom att här flytta över sista termen till högerledet får vi en ekvation vars båda led måste vara en konstant, säg λ. Alltså är $-Z''/Z = \lambda$ och, efter multiplikation med r^2,

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda r^2.$$

Här kan vi på samma sätt flytta över termen med Θ till högerledet, och dessutom λr^2 till vänsterledet. Då ser vi att de två kvantiteterna

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} - \lambda r^2 \quad \text{och} \quad -\frac{\Theta''}{\Theta}$$

måste ha samma konstanta värde. Eftersom Θ är 2π-periodisk, är detta värde av formen n^2 med $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, och $\Theta(\theta) = a\cos n\theta + b\sin n\theta$. För R får vi då ekvationen

$$r^2R'' + rR' - (\lambda r^2 + n^2)R = 0.$$

Om $\lambda > 0$, säg $\lambda = \mu^2$ med $\mu > 0$, har vi den modifierade Besselekvationen, med lösningar

$$R(r) = cI_n(\mu r) + c'K_n(\mu r).$$

Men K_n är singulär i 0 och förkastas, och I_n är positiv och kan inte uppfylla randvillkoret $R(R_0) = 0$. Vi kan avfärda fallet $\lambda > 0$.

Om $\lambda = 0$, har vi en Eulerekvation, och ansatsen $R(r) = r^\gamma$ ger $\gamma = \pm n$. Lösningarna är därför

$$R(r) = cr^n + c'r^{-n}$$

om $n > 0$ resp.

$$R(r) = c + c'\ln r$$

om $n = 0$. Detta fall kan avfärdas på liknande grunder.

Om slutligen $\lambda < 0$, sätter vi $\lambda = -\mu^2$ med $\mu > 0$ och får Bessels ekvation, med lösningar

$$R(r) = cJ_n(\mu r) + c'Y_n(\mu r).$$

Här förkastas Y_n som är singulär i 0. Då återstår $J_n(\mu r)$, och randvillkoret ger $J_n(\mu R_0) = 0$. Vi kan skriva $\mu = \lambda_{kn}/R_0$, där λ_{kn}, $k = 1, 2, \ldots$, betecknar de positiva nollställena till J_n. Vi har därmed

$$R(r) = J_n\left(\frac{\lambda_{kn} r}{R_0}\right).$$

För λ får vi alltså värdena $\lambda = -(\lambda_{kn}/R_0)^2$, och ekvationen för Z är därför $Z'' = (\lambda_{kn}/R_0)^2 Z$. Det betyder att

$$Z(z) = \alpha \cosh \frac{\lambda_{kn} z}{R_0} + \beta \sinh \frac{\lambda_{kn} z}{R_0}.$$

Randvillkoret för $z = 0$ medför att $\alpha = 0$, och vi kan sätta $Z(z) = \sinh \lambda_{kn} z/R_0$. De separerade lösningarna blir nu

$$J_n\left(\frac{\lambda_{kn} r}{R_0}\right)(a \cos n\theta + b \sin n\theta) \sinh \frac{\lambda_{kn} z}{R_0},$$

där $n = 0, 1, \ldots$ och $k = 1, 2, \ldots$.

Som lösning u ansätter vi en summa av separerade lösningar, alltså

$$u(r, \theta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\lambda_{kn} r}{R_0}\right)(a_{kn} \cos n\theta + b_{kn} \sin n\theta) \sinh \frac{\lambda_{kn} z}{R_0}.$$

Det återstående randvillkoret, för $z = \ell$, medför då

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\lambda_{kn} r}{R_0}\right)(a_{kn} \cos n\theta + b_{kn} \sin n\theta) \sinh \frac{\lambda_{kn} \ell}{R_0} = r \cos\theta + r \sin\theta.$$

Som funktion av θ är vänsterledet en Fourierserie, som på grund av högerledets utseende bara kan innehålla termer med $n = 1$. Övriga a_{kn} och b_{kn} måste vara 0. För termerna med $\cos\theta$ får vi därför

$$\sum_{k=1}^{\infty} J_1\left(\frac{\lambda_{k1} r}{R_0}\right) a_{k1} \cos\theta \sinh \frac{\lambda_{k1} \ell}{R_0} = r \cos\theta,$$

och motsvarande för $\sin\theta$. I denna likhet kan faktorerna $\cos\theta$ strykas, och det gäller att utveckla funktionen r i ortogonalbasen $J_1(\lambda_{k1} r/R_0)$ på intervallet $(0, R_0)$, med vikt

$w(r) = r$. Koefficienterna blir

$$a_{k1} \sinh \frac{\lambda_{k1}\ell}{R_0} = \frac{1}{\|J_1(\lambda_{k1}r/R_0)\|_r^2} \int_0^{R_0} r J_1\left(\frac{\lambda_{k1}r}{R_0}\right) r\,dr.$$

Den viktade normen här återfinns i BETA 12.4, sidan 275, och man får

$$a_{k1} = \frac{2}{R_0^2 J_2(\lambda_{k1})^2 \sinh(\lambda_{k1}\ell/R_0)} \int_0^{R_0} r J_1\left(\frac{\lambda_{k1}r}{R_0}\right) r\,dr.$$

Samma resonemang för termerna med $\sin\theta$ ger att $b_{k1} = a_{k1}$. Ett korrekt och fullt tillräckligt svar på uppgiften är därför

$$u(r,\theta,z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k1} J_1\left(\frac{\lambda_{k1}r}{R_0}\right)(\cos\theta + \sin\theta)\sinh\frac{\lambda_{k1}z}{R_0},$$

med a_{k1} enligt ovan.

Men värdet av integralen i uttrycket för a_{k1} kan, efter variabeltransformationen $s = \lambda_{k1}r/R_0$, fås från BETA 12.4, sjätte raden i den stora rutan på sidan 274. Resultatet blir att koefficienterna ges av det enklare uttrycket

$$a_{k1} = \frac{2R_0}{\lambda_{k1} J_2(\lambda_{k1}) \sinh(\lambda_{k1}\ell/R_0)}.$$