MATEMATISKA VETENSKAPER — Datum: 2013-08-29
Chalmers — Skrivtid: 8.30 - 13.30
Telefon: Cornelia Jareteg 0703-088304

Tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2 och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Hjälpmedel: Godkänd räknedosa, BETA samt "Några tips om Fourierserier m.m. i BETA" (två sidor).
Maxpoäng står inom parentes efter varje uppgift, med summa 52.
Betygsgränser: Betyg 3: 25, betyg 4: 33, betyg 5: 41.
Svar i form av svårberäknade integraluttryck kan i vissa fall accepteras eller åtminstone ge poäng.

1. Lös problemet

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 < x < 2,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(2,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = \cos \pi x, & 0 < x < 2 \\ u_t(x,0) = x^2, & 0 < x < 2. \end{cases}$$

(8)

2. Definiera

$$f(t) = \int_{-1}^{1} \sqrt{|x|}\, e^{2ixt}\, dx.$$

Bestäm $\int_0^\infty f(t)^2\, dt$ och $f''(0)$. (5+3)

3. Bestäm en lösning $u = u(x,t)$ till ekvationen

$$u_t = u_{xx} - u$$

för $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, med $u(x,0) = 1$ för $|x| < a$ och $u(x,0) = 0$ för $|x| > a$. Här är $a > 0$ en konstant. (8)

4. Låt N och μ vara naturliga tal med $1 \leq \mu < N$. Betrakta den ändliga följden $a = (a_n)_{n=0}^{N-1}$ given av att $a_\mu = 1,\ \ a_{\mu-1} = -1$ och övriga $a_n = 0$.
(a) Vad är den diskreta Fouriertransformen av följden a? Det är valfritt att använda kursbokens definition av den diskreta Fouriertransformen eller den något avvikande i BETA.
(b) Ge speciellt ett enkelt uttryck för absolutbeloppen av denna Fouriertransforms värden.
(c) Beräkna
$$\sum_{k=1}^{N-1} \sin^2 \frac{\pi k}{N},$$
t.ex. med hjälp av (a) och (b). (3+1+4)

5. Bestäm en lösning $u(x, y, t)$ till vågekvationen $u_{tt} = c^2 \Delta u$ i cirkelskivan $x^2 + y^2 < R_0^2$, för $t > 0$. Här är $R_0 > 0$ en konstant. Lösningen skall uppfylla randvillkoret $u_r(x, y, t) = 0$ på randen $x^2 + y^2 = R_0^2$ för alla $t > 0$, där u_r är derivatan i den radiella riktningen. Initialvillkoren är $u(x, y, 0) = y^2$ och $u_t(x, y, 0) = 0$. (10)

6. Formulera och bevisa satsen som ger Fourierserien för en primitiv funktion till funktionen f med Fourierserien $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$. (5)

7. Förklara på vilket sätt en partialsumma av en funktions Fourierserie är den bästa approximationen av funktionen. (5)