Matematiska vetenskaper
Chalmers & GU
2012

Introduktion till distributionsteorin

Peter Sjögren

1 Inledning

Heaviside-funktionen definieras som $H = \chi_{(0,\infty)}$, alltså med värdena 1 på den positiva halvaxeln, 0 på den negativa. Man påstår ofta att dess derivata skulle vara Dirac-funktionen δ, som ju inte existerar men ska ha egenskapen att $\int \delta(x)\phi(x)\,dx = \phi(0)$ för alla kontinuerliga funktioner ϕ. Motiveringen är följande partialintegration:

$$\int H'\phi\,dx = -\int H\phi'\,dx = -\int_0^\infty \phi'\,dx = \phi(0) = \int \delta(x)\phi(x)\,dx.$$

Här är den första likheten närmast en förhoppning. För att slippa utintegrerade termer förutsätter vi att funktionen ϕ är 0 långt borta, dvs. att den är 0 utanför ett begränsat intervall. Dessutom bör ϕ ha en kontinuerlig derivata.

Låt oss gå vidare med dessa glada kalkyler och fråga efter andraderivatan H'', som bör sammanfalla med δ'. Två partialintegrationer, och en tredje på slutet, borde nu ge

$$\begin{aligned}\int H''\phi\,dx = \int H\phi''\,dx = \int_0^\infty \phi''\,dx \\ = -\phi'(0) = -\int \delta(x)\phi'(x)\,dx = \int \delta'(x)\phi(x)\,dx.\end{aligned}$$

Här bör vi lägga till att ϕ nu skall ha två kontinuerliga derivator.

Allt detta är förstås meningslöst, så som det står här. Men kan vi ge det mening? Om H', H'', δ och δ' finns, kan de inte ges av punktvisa värden, de är inte funktioner. Men ovanstående tyder på att de kan "integreras" mot snälla funktioner ϕ. Fast några riktiga integraler är det ju inte, så det är bättre att säga att de *verkar* på snälla funktioner, eller att de *testas* mot dem. Vi ska alltså tänka oss objekt som producerar ett tal då de verkar på en snäll funktion. Ett sådant objekt är ju en avbildning av någon mängd av snälla funktioner, kallade testfunktioner, in i mängden av (reella eller komplexa) tal. Observera att den avbildningen blir linjär, alla uttryck ovan är ju linjära i ϕ.

2 Testfunktioner

Vi börjar därför med att införa de testfunktioner vi skall använda. Antalet derivator som behövs är svårt att förutsäga, så det är bäst att ta funktioner med derivator av *alla* ordningar.

Definition. *Rummet av testfunktioner C_0^∞ eller $C_0^\infty(\mathbb{R})$ består av de funktioner ϕ på $\mathbb{R}$ vars derivator $\phi^{(m)}$ av alla ordningar m existerar och är kontinuerliga, och som har egenskapen att $\phi = 0$ utanför något begränsat intervall.*

Då blir den första frågan: finns sådana funktioner, utöver 0-funktionen? Kan en funktion vara 0 på ena sidan om en punkt men nollskild på andra sidan, och ändå ha oändligt många kontinuerliga derivator? Polynomuttryck av typ x^N för $x > 0$ fortsatt med 0 till vänster, alltså $x^N H(x)$, har många, men inte oändligt många, derivator. Men funktionen $\psi(x) = e^{-\frac{1}{x}} H(x)$ har denna egenskap. Genom att derivera ψ upprepade gånger ser vi nämligen att varje derivata av ψ för $x > 0$ är av formen

$$\frac{\text{polynom}}{x^M}\, e^{-\frac{1}{x}}$$

för något naturligt tal M. Nära 0 kan beloppet av detta uttryck uppskattas med konst $\cdot\, x^{-M} e^{-\frac{1}{x}}$, som har gränsvärde 0 då $x \to 0$. (Byt ut x mot $t = 1/x$, där $t \to \infty$, så får man $t^M e^{-t}$ som går mot 0.) Det betyder att alla derivator av ψ är kontinuerliga med värdet 0 i 0.
Med hjälp av denna ψ kan vi bilda många testfunktioner, t.ex. $\phi(x) = \psi(x-a)\psi(b-x)$ som är positiv i intervallet (a, b) men 0 utanför.

För att ge en korrekt definition av distributioner, måste vi också införa ett (ganska restriktivt) *konvergens*begrepp *för testfunktioner*, men det kan man hoppa över till att börja med. Om ϕ och ϕ_j, $j = 1, 2, \ldots$, är testfunktioner, skall $\phi_j \to \phi$ betyda att ϕ och alla ϕ_j är 0 utanför ett och samma begränsade intervall I, att $\phi_j \to \phi$ likformigt i I och att på samma sätt

$$\frac{d^m \phi_j}{dx^m} \to \frac{d^m \phi}{dx^m}$$

likformigt i I, för alla m.

3 Definition av distributioner. Exempel

Definition. *En distribution u är en linjär avbildning $\phi \mapsto u[\phi]$ av C_0^∞ in i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, som är kontinuerlig i den meningen att $\phi_j \to \phi$ medför $u[\phi_j] \to u[\phi]$, där ϕ_j och ϕ är testfunktioner.*

Att u är linjär betyder förstås att

$$u[a_1\phi_1 + a_2\phi_2] = a_1 u[\phi_1] + a_2 u[\phi_2]$$

för alla testfunktioner ϕ_1 och ϕ_2 och alla skalärer $a_1,\ a_2$. Kontinuitetsvillkoret är i allmänhet trivialt uppfyllt för de distributioner man sysslar med och vållar sällan problem i praktiken.

Vi ger ett flertal exempel på distributioner.

Ex. 1

$$u[\phi] = \int_0^\infty \phi(x)\,dx, \qquad \text{dvs.} \qquad u = H;$$

Ex. 2

$$u[\phi] = \phi(0) \qquad \text{dvs.} \qquad u = \delta;$$

Ex. 3

$$u[\phi] = \phi(a), \quad a \in \mathbb{R}, \qquad \text{dvs.} \qquad u = \delta_a;$$

Ex. 4

$$u[\phi] = \phi'(b), \quad b \in \mathbb{R};$$

Ex. 5

$$u[\phi] = \int_{-\infty}^\infty e^x \phi(x)\,dx;$$

Ex. 6

$$u[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)\,dx, \qquad f \text{ en kontinuerlig funktion;}$$

Ex. 7

$$u[\phi] = \int_{-\infty}^{-2} \sin x\,\phi(x)\,dx + 2\phi\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\phi(x)\,dx;$$

Ex. 8

$$u[\phi] = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^{(k)}(k);$$

Ex. 9

$$u[\phi] = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}\phi(\frac{1}{m}).$$

För att se att dessa u är distributioner enligt definitionen observerar vi först att alla integraler och summor ovan konvergerar, eftersom ϕ är 0 utanför ett begränsat intervall. Speciellt är summan i Ex. 8 i själva verket ändlig. I Ex. 9 konvergerar summan eftersom koefficienterna avtar snabbt och ϕ är begränsad. Att alla u är linjära är klart. Kontinuitetsvillkoret kan också visas vara uppfyllt.
I Ex. 3 är δ_a ett translat av Diracdistributionen från Ex. 2; i Follands bok[1] betecknas detta $\delta(x-a)$. Denna distribution beskrivs också som en punktmassa i a.
Observera att Ex. 1, 5 och 6 är distributioner som ges av en integral av testfunktionen multiplicerad med någon fix funktion. Då säger man att distributionen *är* denna funktion. Varje lokalt integrerbar funktion kan på detta sätt ses som en distribution. (Lokalt integrerbar betyder att $\int_I |f(x)|\,dx < \infty$ för vaje begränsat intervall I.) Men de övriga exemplen är inte av detta slag. Poängen med distributioner är just att man får en utvidgning av funktionsbegreppet. För de flesta distributioner är det alltså meningslöst att fråga efter värdet i en punkt. **Allt en distribution kan göra är att verka på testfunktioner**.

[1]G.B. Folland: Fourier analysis and its applications, Wadsworth & Cole 1992

4 Derivering

För att se hur man bör definiera derivatan av en distribution låtsas vi att den ges av integration mot en deriverbar funktion. Då skulle en partialintegration ge formeln i följande definition.

Definition. *Om u är en distribution, är dess derivata u' den distribution som ges av att*

$$u'[\phi] = -u[\phi']$$

för alla testfunktioner ϕ.

Vi ser alltså att detta utvidgar det vanliga derivatabegreppet. Det är lätt att verifiera att u' verkligen blir en distribution, och detsamma gäller då även u:s derivator av högre ordning. Något problem med deriverbarhet finns alltså inte här, en distribution kan deriveras ett obegränsat antal gånger.

Nu kan vi verifiera det vi gissade oss till i inledningen. Derivatan av distributionen H från Ex. 1 ges enligt definitionen av

$$H'[\phi] = -H[\phi'] = -\int_0^\infty \phi'\, dx = \phi(0) = \delta[\phi],$$

så att mycket riktigt $H' = \delta$. Vi får då också

$$H''[\phi] = -H'[\phi'] = -\delta[\phi'] = -\phi'(0) = \delta'[\phi].$$

Man kan fortsätta med $\delta''[\phi] = \phi''(0)$ och med $\delta'_a[\phi] = -\phi'(a)$.

Vi tar ett lite allmännare exempel.
Exempel 1. Anta att funktionen u är styckvis glatt på $\mathbb{R}$, med indelningspunkter $x_0 < x_1 < ... < x_k$. Då har u derivata i vanlig mening mellan indelningspunkterna men kan ha språngdiskontinuiteter i indelningspunkterna. Vi kan uppfatta u som en distribution. Vad blir dess derivata i distributionsmening? (Ett specialfall av detta är $u = H$ med derivata $u' = \delta$ enligt ovan.) Ta en testfunktion ϕ. Vi kan anta att $\phi = 0$ i intervallen $(-\infty, x_0]$ och $[x_k, \infty)$, för om inte så kan vi lägga till indelningspunkter och numrera om. Genom att partialintegrera i intervallen mellan indelningspunkterna får

vi

$$\begin{aligned}
u'[\phi] = -u[\phi'] = -\int_{x_0}^{x_k} u(x)\phi'(x)\,dx &= -\sum_{j=1}^{k}\int_{x_{j-1}}^{x_j} u(x)\phi'(x)\,dx \\
= -\sum_{j=1}^{k}[u(x_j-)\phi(x_j) - u(x_{j-1}+)\phi(x_{j-1})] &+ \sum_{j=1}^{k}\int_{x_{j-1}}^{x_j} u'(x)\phi(x)\,dx.
\end{aligned}$$

I summan av termerna med index $j-1$ byter vi ut $j-1$ mot m och får $\sum_{m=0}^{k} u(x_m+)\phi(x_m)$. I denna summa spelar det ingen roll om vi tar med termerna med $m = 0$ och $m = k$ eller inte, eftersom vi har sett till att ϕ är 0 i x_0 och x_k. I summan av termerna med index j byter vi bara ut j mot m. Resultatet blir

$$u'[\phi] = \sum_{m=0}^{k}[u(x_m+) - u(x_m-)]\phi(x_m) + \int u'(x)\phi(x)\,dx.$$

Lägg märke till att den sista termen motsvarar den punktvisa derivatan av u, verkande på ϕ. Vi kan skriva denna formel kortare som

$$\begin{aligned}
&\text{distributionsderivatan } u' \\
&\qquad = \sum_{m=0}^{k}[u(x_m+) - u(x_m-)]\delta_{x_m} + \text{ punktvisa derivatan } u'. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Faktorn $u(x_m+) - u(x_m-)$ är ju språnget i punkten x_m. Detta säger alltså att varje diskontinuitet ger ett tillskott till distributionsderivatan som är en punktmassa i språngpunkten, lika stor som språnget.

5 Det flerdimensionella fallet

Detta avsnitt blir kort, eftersom utvidgningen till distributioner i $\mathbb{R}^n$ är helt analog med det 1-dimensionella fallet. Det räcker att säga att testfunktionerna skall ha kontinuerliga partiella derivator av alla ordningar, och att de skall vara 0 utanför någon begränsad mängd. Definitionen av partiella derivator av distributioner blir

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}[\phi] = -u\left[\frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right].$$

Det är lätt att verifiera att partiella derivator av högre ordning såsom $\partial u/\partial x_k \partial x_j$ då alltid blir oberoende av derivationsordningen.

6 Multiplikation och faltning

Vi skall definiera dessa två operationer, där den ena faktorn kommer att vara en funktion och den andra en distribution u. För båda operationerna vägleds vi av det enkla fallet då u är en funktion.

Om f är en (lämplig) funktion, och distributionen u råkar vara en funktion, kan vi uppfatta produkten fu, dvs. funktionen $f(x)u(x)$, som en distribution, med verkan

$$(fu)[\phi] = \int f(x)u(x)\phi(x)\,dx$$

på testfunktionen ϕ. I integralen här skriver vi faktorerna i ordningen $uf\phi$. Anta nu att f är oändligt deriverbar, och observera att produkten $f\phi$ då är en testfunktion. Integralen är alltså $u[f\phi]$, verkan av u på denna testfunktion. Detta leder oss till följande definition.

Definition. *Om u är en distribution och f en oändligt deriverbar funktion, är produkten fu den distribution som verkar på testfunktionen ϕ genom*

$$(fu)[\phi] = u[f\phi].$$

Det är lätt att se att fu då faktiskt blir en distribution.

Vi ger två exempel. Låt först $u = \delta_a$, som ger

$$(f\delta_a)[\phi] = \delta_a[f\phi] = f(a)\phi(a) = f(a)\delta_a[\phi],$$

så att $f\delta_a = f(a)\delta_a$. Exemplet $x\delta'$ är inte lika intuitivt; man får

$$\begin{aligned}(x\delta')[\phi] = \delta'[x\phi(x)] = -\delta[(x\phi(x))'] &= -(x\phi(x))'|_{x=0} \\ &= -(\phi(x) + x\phi'(x))|_{x=0} = -\phi(0) = -\delta[\phi]\end{aligned}$$

och alltså $x\delta' = -\delta$.

Vi skall nu definiera faltningen (konvolutionen) av en distribution u och en testfunktion ψ, och tänker återigen på fallet då u är en funktion. Då blir faltningen funktionen

$$u * \psi(x) = \int u(y)\psi(x-y)\,dy.$$

Den naturliga sättet att ge mening åt denna integral för en godtycklig distribution u är att låta u verka på funktionen $y \mapsto \psi(x-y)$, vilket som resultat ger en funktion av x. I följande definition skriver vi denna verkan på två sätt.

Definition. *Om u är en distribution och ψ en testfunktion, är $u * \psi$ den funktion vars värde i punkten x är*

$$u[\psi(x-.)] = u_y[\psi(x-y)].$$

Indexet y på u anger här att u:s verkan skall tas i variabeln y.

Ett exempel är $\delta_a * \psi(x) = \delta_a[\psi(x-.)] = \psi(x-a)$, som är ett translat av ψ. Fallet $a=0$ ger speciellt att $\delta * \psi = \psi$ för alla testfunktioner ψ. Ett annat exempel ges av

$$\delta' * \psi(x) = \delta'[\psi(x-.)] = -\frac{\partial}{\partial y}\psi(x-y)\Big|_{y=0} = \psi'(x),$$

så att $\delta' * \psi = \psi'$.

7 Konvergens för distributioner

Definition. *En följd $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ av distributioner säges konvergera svagt, eller i distributionsmening, mot distributionen u om $u_j[\phi] \to u[\phi]$ då $j \to \infty$ för varje testfunktion ϕ.*

Motsvarande definition gäller för en familj av distributioner indexerade med en kontinuerlig parameter, t.ex. u_ε då $\varepsilon \to 0$.

Ett exempel: om a_j är reella tal och $a_j \to a$, så har man svag konvergens $\delta_{a_j} \to \delta_a$, ty

$$\delta_{a_j}[\phi] = \phi(a_j) \to \phi(a) = \delta_a[\phi].$$

Ett annat, viktigt exempel är följande.
Exempel 2. Låt g vara en funktion på $\mathbb{R}$ med integral $\int g(x)\,dx = 1$. För enkelhets skull antar vi också att g är kontinuerlig, att $g \geq 0$ och att g är 0 utanför ett intervall $(-A, A)$, men detta kan försvagas. Sätt nu

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} g(\frac{x}{\varepsilon})$$

för $\varepsilon > 0$. Lägg märke till att integralen behåller sitt värde, $\int g_\varepsilon(x)\,dx = 1$, och att g_ε för små ε-värden blir alltmer hoptryckt till en liten omgivning av 0 men där tar desto större värden (en "spik"). Därför är det inte överraskande att g_ε som distribution *konvergerar svagt mot* δ då $\varepsilon \to 0$. För att visa detta tar vi en testfunktion ϕ och skriver

$$g_\varepsilon[\phi] - \phi(0) = \int g_\varepsilon(x)[\phi(x) - \phi(0)]\,dx = \int_{-A}^{A} g(y)[\phi(\varepsilon y) - \phi(0)]\,dy,$$

andra steget här med variabeltransformationen $x = \varepsilon y,\ dx = \varepsilon dy$. Absolutbeloppet av den sista integralen kan vi uppskatta med

$$\int_{-A}^{A} |g(y)|\,dy \sup_{|z|\le\varepsilon A} |\phi(z) - \phi(0)|,$$

och pga. den andra faktorn går detta mot 0 då $\varepsilon \to 0$. Detta visar distributionskonvergensen $g_\varepsilon \to \delta$.

Följande resultat visar att svag konvergens följer av flera andra slag av konvergens, så att termen är motiverad.

Sats 1. *(a) Om en funktionsföljd (f_j) av kontinuerliga funktioner på $\mathbb{R}$ konvergerar punktvis mot en funktion f och konvergensen är likformig på varje begränsat intervall, så konvergerar f_j svagt mot f.*
(b) Samma slutsats gäller om f_j tillhör L^2 på varje begränsat intervall och där konvergerar mot f i L^2-mening.

Bevis: I båda fallen skall det visas att integralerna $\int f_j\phi\,dx$ konvergerar mot $\int f\phi\,dx$, om ϕ är en testfunktion. Men detta följer pga. likformigheten i (a) och ur L^2-konvergensen i (b) via Cauchy-Schwarz olikhet tillämpad på $\int (f_j - f)\phi\,dx$. □

En av distributionskalkylens många fördelar är att man *alltid* kan kasta om ordningen mellan derivation och gränsövergång:

Sats 2. *Om (u_j) är en följd av distributioner på $\mathbb{R}$ och $u_j \to u$ svagt, så har man också att $u_j' \to u'$ svagt. Motsvarande gäller för distributioner i $\mathbb{R}^n$ och partiella derivator.*

Beviset är enkelt: Som vanligt tar vi en testfunktion ϕ och får i $\mathbb{R}$-fallet $u_j'[\phi] = -u_j[\phi'] \to -u[\phi'] = u'[\phi]$.

8 Distributioner och Fourierserier

En distribution u på $\mathbb{R}$ kallas T-periodisk om $u[\phi]$ inte ändras då testfunktionen ϕ ersätts med sitt T-translat, alltså $u[\phi] = u[\phi(. - T)]$. Vi skall se att varje 2π-periodisk distribution kan utvecklas i en svagt konvergent Fourierserie.
Först visar vi att en given Fourierserie $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n e^{inx}$ konvergerar svagt så snart koefficienterna inte växer alltför häftigt. Anta att koefficienterna c_n har *högst polynomiell tillväxt*, dvs. att

$$|c_n| \leq \text{konst} \cdot |n|^N, \qquad n \neq 0,$$

för något N och någon konstant. Med $m = N + 2$ får vi då

$$\left| \frac{c_n}{(in)^m} \, e^{inx} \right| \leq \frac{\text{konst}}{n^2}, \qquad n \neq 0.$$

Eftersom högerleden här bildar termerna i en konvergent serie, ger Weierstrass majorantsats (M-test) att $\sum_{n\neq 0} \frac{c_n}{(in)^m} \, e^{inx}$ konvergerar likformigt på hela linjen, mot en funktion som vi kallar v, och som blir kontinuerlig och 2π-periodisk. Då konvergerar alltså partialsummorna

$$v_N = \sum_{0<|n|\leq N} \frac{c_n}{(in)^m} \, e^{inx}$$

likformigt, och därmed också svagt, mot v. Denna ändliga summa kan vi derivera termvis, m gånger, och få

$$v_N^{(m)} = \sum_{0<|n|\leq N} c_n \, e^{inx},$$

i såväl vanlig mening som distributionsmening. Upprepad användning av Sats 2 ger att $v_N^{(m)}$ konvergerar svagt mot distributionen $v^{(m)}$ (som i allmänhet inte kommer att vara en funktion). Nu kan vi ta med den utelämnade 0-termen och se att den givna seriens partialsummor

$$\sum_{|n|\leq N} c_n \, e^{inx} = c_0 + v_N^{(m)}$$

konvergerar mot distributionen $c_0 + v^{(m)}$. Lägg märke till att dessa partialsummor och därmed också $c_0 + v^{(m)}$ är 2π-periodiska.

Vi har visat del (a) av följande sats.

Sats 3. *(Theorem 9.6 sid. 322 i Follands bok)*
(a) Om koefficienterna c_n har högst polynomiell tillväxt, konvergerar serien $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ svagt mot en 2π-periodisk distribution.
(b) Omvänt kan varje 2π-periodisk distribution utvecklas som $u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ där serien konvergerar svagt och c_n växer högst polynomiellt.

Folland glömmer i sin formulering att ange att perioden är 2π.
Vi avstår från att bevisa (b). Satsen kan enkelt generaliseras till det T-periodiska fallet.

Som exempel kan vi välja $c_n = 1$ och få serien $\sum e^{inx}$, som uppenbarligen inte konvergerar punktvis. Mot vilken distribution konvergerar den svagt? Vi skriver om serien som

$$\sum e^{inx} = 1 + 2\sum_1^\infty \cos nx = 1 + 2\sum_1^\infty \frac{d}{dx}\frac{\sin nx}{n} = 1 + 2\frac{d}{dx}\sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n}. \quad (2)$$

När vi här i sista steget flyttar ut derivationen, är det fråga om distributionsderivatan, och det är Sats 2 som tillåter detta.
Den sista summan i (2) känner vi igen som Fourierserien för funktionen f_3 i tabellen i Follands bok, så att

$$2\sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n} = \pi - x, \qquad 0 < x < 2\pi.$$

Högerledet här kan fortsättas till en styckvis glatt 2π-periodisk funktion, med språng i alla heltalsmultipler av 2π, och då gäller likheten i alla övriga punkter på $\mathbb{R}$. Vi har också L^2-konvergens i $[0, 2\pi]$ och i varje begränsat intervall, och därmed också svag konvergens enligt Sats 1(b). Likheten gäller alltså i distributionsmening, och även distributionsderivatorna av båda leden stämmer överens. Högerledets derivata får vi då ur Exempel 1. Mellan språngpunkterna är derivatan av högerledet -1, och alla sprången har storlek 2π. Formeln (1) ger då att

$$2\frac{d}{dx}\sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{2\pi k} - 1$$

i distributionsmening. Kombinerat med (2) ger detta som resultat att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{2\pi k}, \quad (3)$$

i distributionsmening men givetvis inte punktvis.

Efter detta undrar man: kunde vi ha härlett den vackra formeln (3) genom att utgå från summan i högerledet och utveckla den i Fourierserie? Vi sätter då $\delta_{\text{per}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{2\pi k}$, eftersom denna summa kan ses som en periodisering av distributionen δ. Om man försöker med den vanliga formeln för Fourierkoefficienterna, skulle man få

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta_{\text{per}}(x) e^{-inx}\, dx.$$

Observera att denna formel formellt är meningslös; distributionen δ_{per} kan inte integreras över ett intervall på detta sätt. Ändå är det frestande att tänka sig att integralen fångar upp bara den punktmassa i δ_{per} som faller inom intervallet $(-\pi, \pi)$, alltså $\delta_0 = \delta$. De övriga punktmassorna i δ_{per} ligger ju långt från intervallet och bör inte ge något bidrag till integralen. Denna naiva tanke ger rätt resultat enligt (3), $c_n = 1/(2\pi)$ för alla n.
I standardfallet, när man har en 2π-periodisk funktion och använder samma formel för dess Fourierkoefficienter, kan man ju välja att integrera över vilket intervall av längd 2π man vill. Detta går också i detta fall, med samma intuitiva resultat, utom att man måste undvika att välja ett intervall med ändpunkter där δ_{per} har sina masspunkter, såsom $(0, 2\pi)$. Då blir det nämligen högst tveksamt hur integralen bör tolkas.
Vi påpekar att man i ovanstående kan välja en periodlängd T i stället för 2π och få

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{Tk} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi}{T}nx},$$

som är en generalisering av (3). Vänsterledet här kallas ett impulståg och förekommer i samband med dynamiska system.

9 Distributioner och Fouriertransformer

Vi frågar oss vad Fouriertransformen av en distribution u bör vara. Om u råkar vara en distribution i $L^1(\mathbb{R})$, blir $\hat{u}$ en begränsad funktion som vi kan betrakta som en distribution. Verkan av $\hat{u}$ på en testfunktion ϕ är i det fallet

$$\int \hat{u}(\xi)\phi(\xi)\,d\xi = \int\int u(x)e^{-ix\xi}\,dx\,\phi(\xi)\,d\xi$$
$$= \int u(x)\int e^{-ix\xi}\phi(\xi)\,d\xi\,dx = \int u(x)\hat{\phi}(x)\,dx,$$

så att

$$\hat{u}[\phi] = u[\hat{\phi}]. \tag{4}$$

Det ligger nära till hands att använda denna likhet för att definiera $\hat{u}$ för alla distributioner. Men för att högerledet $u[\hat{\phi}]$ skall vara definierat krävs då att $\hat{\phi}$ är en testfunktion. Men det är den inte. (Anledningen är att definitionen av $\hat{\phi}(\xi)$ kan utvidgas till komplexa ξ och man får en analytisk funktion i hela det komplexa ξ-planet. Men en testfunktion skall vara 0 på stora delar av reella axeln, och det skulle tvinga denna analytiska funktion att vara identiskt 0.) Vi ska se att $\hat{\phi}$ ändå har många bra egenskaper, om ϕ är en testfunktion. Alla dess derivator existerar, eftersom $(id/d\xi)^m\hat{\phi}$ för varje m är Fouriertransformen av den integrabla funktionen $x^m\phi(x)$ och därför en begränsad, kontinuerlig funktion. Vidare är $(i\xi)^k(id/d\xi)^m\hat{\phi}$ för varje k Fouriertransformen av den integrabla funktionen $(d/dx)^k(x^m\phi(x))$ och därmed begränsad och kontinuerlig. Detta säger att varje derivata av $\hat{\phi}$ är kontinuerlig och dessutom avtar åtminstone som $|\xi|^{-k}$ i oändligheten, för varje k.
För att vi ska kunna använda (4) som definition av $\hat{u}$ måste u väljas ur en delmängd av distributioner för vilka $u[\hat{\phi}]$ alltid existerar. Det innebär att u måste kunna verka på en klass $\mathcal{S}$ av funktioner som utöver testfunktionerna inehåller alla deras Fouriertransformer $\hat{\phi}$, och som vi nu inför.

Definition. *Schwartz-rummet $\mathcal{S}$ består av alla funktioner ϕ definierade och oändligt deriverbara på hela $\mathbb{R}$ och sådana att $|x|^k\left|\frac{d^m\phi}{dx^m}\right|$ är begränsad på $\mathbb{R}$ för alla naturliga tal k och m.*

Funktionerna i $\mathcal{S}$ kallas *Schwartzfunktioner*, ibland också *snabbt avtagande funktioner*. Alla testfunktioner tillhör $\mathcal{S}$. Ett exempel på en funktion i $\mathcal{S}$ som inte är en testfunktion är $\phi(x) = e^{-ax^2}$, där $a > 0$.

Vad resonemanget ovan visade var att $\hat{\phi} \in \mathcal{S}$ om ϕ är en testfunktion. Genom att granska resonemanget ser man att det fungerar även om man bara antar att $\phi \in \mathcal{S}$. Slutsatsen blir alltså att Fouriertransformen avbildar Schwartzfunktioner på Schwartzfunktioner.

För dessa funktioner gäller inversionsformeln. Eftersom den formeln säger att inversen $\mathcal{F}^{-1}$ ges av nästan samma uttryck som Fouriertransformen själv, ser vi på samma sätt att $u \in \mathcal{S}$ medför $\mathcal{F}^{-1}u \in \mathcal{S}$. Vi har därmed visat följande resultat.

Sats 4. *Fouriertransformen är en bijektion $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$.*

Konvergens i $\mathcal{S}$ definieras genom att $\phi_j \to \phi$ skall betyda inte bara likformig konvergens, utan likformig konvergens även för alla derivator och även efter multiplikation med en faktor x^k, alltså att

$$x^k \frac{d^m \phi_j}{dx^m} \to x^k \frac{d^m \phi}{dx^m}$$

likformigt på $\mathbb{R}$, för alla k och m.

Nu kan vi definiera de distributioner som verkar på alla Schwartzfunktioner.

Definition. *En tempererad distribution är en linjär avbildning u av $\mathcal{S}$ in i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, som är kontinuerlig i den meningen att $\phi_j \to \phi$ i $\mathcal{S}$ medför $u[\phi_j] \to u[\phi]$.*

Kontinuitetsegenskapen här vållar sällan några problem i praktiken. Den kan ekvivalent uttryckas med en olikhet, se formel (9.25) i Follands bok.
Vi observerar att alla tempererade distributioner är distributioner. De är ju definierade på Schwartzrummet $\mathcal{S}$, som innehåller alla testfunktioner. Omvänt är merparten av de distributioner man sysslar med tempererade, men inte alla. Om vi tittar på de nio distributionerna i avsnitt 3, är det enkelt att se att de i Ex. 1–4, 7 och 9 är tempererade. Det går nämligen bra att låta dem verka på Schwartz-funktioner, man får inga konvergensproblem i oändligheten. Men distributionen i Ex. 5, är inte tempererad eftersom integralen inte konvergerar för alla funktioner i $\mathcal{S}$; deras polynomiella avtagande är här inte tillräckligt. I Ex. 6 hänger det på vilken kontinuerlig funktion f man tar. Distributionen i Ex. 8 är inte tempererad, eftersom man kan visa att summan inte konvergerar för alla Schwartzfunktioner.

Nu kan vi *definiera Fouriertransformen* av en tempererad distribution genom formeln (4). Den blir då också en tempererad distribution.
Här bör man varna för ett elakartat tryckfel i Follands bok. Folland använder F för vårt u i detta sammanhang, men skriver omväxlande F och f. Alla f i formlerna på sidorna 333 och 334 skall vara F.

Vi kan skriva om (4) som

$$\hat{u}[\mathcal{F}^{-1}\hat{\phi}] = u[\hat{\phi}]$$

och eftersom $\hat{\phi}$ är en godtycklig Schwartzfunktion kan vi ta bort hatten över ϕ och få att $u[\phi] = \hat{u}[\mathcal{F}^{-1}\phi]$. Man kan alltså återfå u ur $\hat{u}$, och vi kan ersätta $\hat{u}$ med u och u med $\mathcal{F}^{-1}u$. Resultatet blir att den inversa Fouriertransformen av en tempererad distribution ges av

$$(\mathcal{F}^{-1}u)[\phi] = u[\mathcal{F}^{-1}\phi].$$

Vi ger några exempel. För δ_a får vi $\widehat{\delta_a}[\phi] = \delta_a[\hat{\phi}] = \hat{\phi}(a) = \int \phi(x)e^{-iax}\,dx$, så att

$$\widehat{\delta_a} = e^{-iax}.$$

Denna distribution är alltså en funktion. Speciellt är $\hat{\delta} = 1$. Fouriertransformen av funktionen 1 kan fås på flera sätt, exempelvis genom $\hat{1}[\phi] = 1[\hat{\phi}] = \int \hat{\phi}(x)\,dx = 2\pi\phi(0)$, det sista enligt inversionsformeln. Detta innebär att $\hat{1} = 2\pi\delta$. På samma sätt får man $\widehat{e^{iax}}[\phi] = e^{iax}[\hat{\phi}] = \int e^{iax}\hat{\phi}(x)\,dx = 2\pi\phi(a)$, så att $\widehat{e^{iax}} = 2\pi\delta_a$.
Formlerna som kombinerar derivator och Fouriertransformer

$$\widehat{u'} = i\xi\hat{u} \qquad \text{och} \qquad i\frac{d}{d\xi}\hat{u} = \widehat{xu}$$

gäller utan några inskränkningar för tempererade distributioner. (Här är det underförstått att x och ξ är variabeln för u resp. $\hat{u}$.) Detta visar man enkelt ur definitionen.

Med *konvergens* $u_j \to u$ *för tempererade distributioner* menar man att $u_j[\phi] \to u[\phi]$ för alla Schwartzfunktioner. I Follands bok kallas detta *temperate convergence*. Det följer lätt att $u_j \to u$ medför $\widehat{u_j} \to \hat{u}$ och $\mathcal{F}^{-1}u_j \to \mathcal{F}^{-1}u$. Detta konvergensbegrepp innebär ett något starkare krav än svag konvergens, eftersom man testar mot alla ϕ i $\mathcal{S}$.

Vi avslutar detta avsnitt med att bestämma Fouriertransformen av den periodiserade Diracdistributionen $\delta_{\text{per}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{2\pi k}$ från avsnitt 8. Där såg vi att $\delta_{\text{per}} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}$. Om vi Fouriertransformerar denna likhet termvis, får vi enligt exemplen ovan

$$\widehat{\delta_{\text{per}}} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{e^{inx}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n. \tag{5}$$

(För att verifiera att serierna konvergerar som tempererade distributioner så att denna manöver är tillåten, observerar vi att serierna $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{2\pi k}$ och $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n$ konvergerar som tempererade distributioner, pga. Schwartzfunktionernas snabba avtagande. Genom att ta invers Fouriertransform ser man att även $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}$ konvergerar på samma sätt.)
Låter vi vänster- och högerleden i (5) verka på en godtycklig Schwartzfunktion ϕ, får vi

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(2\pi k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(n),$$

som kallas *Poissons summationsformel*. Den kan visas gälla för betydligt fler funktioner än de i $\mathcal{S}$.