MVE290 - Fouriermetoder, TM2 2012/13
Inlämningsuppgifter i distributionsteori

Varje grupp skall göra de fyra förövningarna och en av huvudövningarna. Förövningarna är desamma för alla, utom att q **skall ersättas med den valda huvudövningens nummer**, alltså ett tal mellan 1 och 20. Lösningarna får därför inte innehålla symbolen q.

Några upplysningar
I vissa uppgifter används begreppet *karakteristiska funktionen* för en mängd E. Det betyder den funktion χ_E som ges av att $\chi_E(x)$ är 1 om $x \in E$, annars 0. Sålunda är Heavisidefunktionen $H(x)$ den karakteristiska funktionen för positiva halvaxeln.
Vi skriver δ_y för den distribution vars verkan på en godtycklig testfunktion ges av

$$\delta_y[\phi] = \phi(y).$$

I Folland betraktas δ_y som ett translat $\delta(. - y)$ av "Diracfunktionen" (ett bättre namn är Diracdistributionen) $\delta = \delta_0$.

Observera tryckfelen på sidorna 333 och 334 i Follands bok:
alla f i formlerna skall vara F.

Det kanske skall påpekas att en uppgifts svårighetsgrad ofta är en avtagande funktion av problemtextens längd.

Förövningar

(i) Verifiera enligt definitionen att

$$u[\phi] = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \phi^{(m)}(q - m)$$

definierar en distribution u på $\mathbb{R}$. Som vanligt betecknar ϕ här en godtycklig testfunktion. Verifiera också att distributionerna u_n, givna av

$$u_n[\phi] = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \phi^{(m)}(q - m - n),$$

konvergerar svagt (dvs. i distributionsmening) mot 0-distributionen då $n \to \infty$.

(ii) Betrakta distributionen

$$u = \frac{1}{\sqrt{t}}\,\chi_{(0,q)} + \sum_{j=1}^{3} \delta_{jq}.$$

Ange först vad $u[\phi]$ blir, för en testfunktion ϕ. Vad är (distributions)derivatan u' ? Ange också en primitiv distribution till u. Här svarar man lämpligen med uttryck som ger de sökta distributionernas verkan på en godtycklig testfunktion. Illustrera också den primitiva distributionen med en graf.

(iii) Låt u_r vara den distribution i $\mathbb{R}^3$ vars verkan på en testfunktion ϕ är ytintegralen av ϕ över sfären $|x| = r$. Mot vilka distributioner konvergerar $r^{-2}u_{qr}$ svagt då $r \to 0$ och då $r \to \infty$?

(iv) Fouriertransformen av δ är enligt Folland sid 335 $\hat{\delta} = 1$, alltså den konstanta funktionen 1, uppfattad som en distribution. Bestäm Fouriertransformen av δ_q och av funktionen $\sin(x - q)$. Man ska då inte låtsas att δ_q är en funktion utan använda definitionen av Fouriertransformen av en tempererad distribution, formel (9.28) sid 333 i Folland. Den säger efter korrektion att

$$\hat{u}[\phi] = u[\hat{\phi}].$$

Här är ϕ en godtycklig Schwartzfunktion.

Huvudövningar

1. Enligt Theorem 9.6 i Folland är varje serie $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, med koefficienter som växer högst som någon potens av n, Fourierserien för någon 2π-periodisk distribution, och serien konvergerar svagt mot denna distribution. (Folland har glömt att ange att perioden är 2π.) Det följer att samma sak gäller för sinus- och cosinusserier. Mot vilka distributioner konvergerar serierna

$$\sum_1^\infty \cos nx, \qquad \sum_1^\infty n \sin nx \quad \text{och} \quad \sum_1^\infty \sin nx\,?$$

   Ledning: Follands Theorem 9.3 medför att sådana här serier kan deriveras termvis i distributionsmening utan inskränkning. Prova att *integrera* de givna serierna, tills man får konvergens mot någon funktion. Derivera sen i distributionsmening.

2. För $\mu > 0$ definierar

$$u_\mu[\phi] = \int_0^\infty x^{\mu-1}\phi(x)\,dx$$

   en distribution u_μ på $\mathbb{R}$. Då $\mu \to 0$ har denna integral för de flesta testfunktioner ϕ inget ändligt gränsvärde; verifiera detta med exempel. Därför har distributionerna u_μ inget svagt gränsvärde då $\mu \to 0$. Detta kan avhjälpas genom multiplikation med en lämplig faktor. Bestäm en kvantitet $Q(\mu)$ sådan att $Q(\mu)u_\mu[\phi]$ konvergerar då $\mu \to 0$, för alla testfunktioner ϕ, och det mot ett värde som inte alltid är 0. Detta betyder att $Q(\mu)u_\mu$ konvergerar svagt då $\mu \to 0$, mot en distribution som inte är nolldistributionen. Ange också vilken denna gränsdistribution är. Man har alltid $\mu > 0$ här. *Ledning*: För att gissa vad $Q(\mu)$ skall vara, ersätt först $\phi(x)$ i integralen med karakteristiska funktionen för ett intervall $(0, a)$. För en godtycklig testfunktion ϕ kan man sedan verifiera konvergensen genom att dela upp den givna integralen i integraler över $(0, a)$ och (a, ∞) och skriva ϕ som $\phi(x) = \phi(0) + (\phi(x) - \phi(0))$ i den första integralen. Detta ger tre integraler, som alla konvergerar då $\mu \to 0$.

3. (a) Betrakta funktionen $u(x) = \ln|x|$ som en distribution i $\mathbb{R}^3$ och $\mathbb{R}^2$. Man vill bestämma Δu, tagen i distributionsmening. Räkna först ut Δu i vanlig, punktvis mening utanför singulariteten i origo, lämpligen med hjälp av polära koordinater. Skriv sen upp den integral som ger verkan av distributionen Δu på en testfunktion. På denna integral kan man använda "Greens andra identitet", som uttrycker integralen av $f\Delta g - g\Delta f$ över ett område i termer av en integral över områdets rand. Välj ett begränsat område vars komplement innehåller ett litet klot kring origo. (Slå upp denna identitet, t.ex. genom att googla på "Green's identities".) Låt sedan klotets radie gå mot 0. Blir resultatet att distributionen Δu ges av de punktvisa värdena eller inte?

4. (a) Låt $a > 0$. Funktionen $u(x) = e^{iax^2}$ är begränsad och definierar därför en tempererad distribution på $\mathbb{R}$. Bestäm Fouriertransformen av denna distribution. Ledning: Verifiera att distributionen u är svaga gränsvärdet då $\epsilon \searrow 0$ av $u_\epsilon(x) = e^{(ia-\epsilon)x^2}$, vars Fouriertransformer kan beräknas genom komplex integration eller analytisk fortsättning från det kända fallet $a = 0$. Låt slutligen $\epsilon \to 0$.

5. Anta att distributionen u på $\mathbb{R}$ uppfyller $u' = 0$, den enklaste av alla differentialekvationer. Visa att u då är en konstant funktion. Att tillåta u att vara en distribution ger alltså inga "nya" lösningar.

   Ledning: Uttryck först ekvationen i termer av hur u verkar på testfunktioner, med hjälp av definitionen av distributionsderivata. Följande lemma är användbart.

   Lemma. Om testfunktionen ϕ uppfyller $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,dx = 0$, så är $\phi = \psi'$ för någon testfunktion ψ.

   Fixera en testfunktion ϕ_0 med $\int_{\mathbb{R}} \phi_0(x)\,dx = 1$. Visa med hjälp av lemmat att en godtycklig testfunktion ϕ kan skrivas som $\phi = C\phi_0 + \psi'$ där ψ är en testfunktion. Vilket värde får konstanten C? Låt nu u verka på denna uppdelning.

   Bevisa slutligen lemmat, genom att se vad ψ måste vara.

6. Efter en variabeltransformation kan vågekvationen i planet skrivas $\partial^2 u/\partial x_1 \partial x_2 = 0$. Det är enkelt och välkänt att den allmänna lösningen till denna ekvation är $u(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2)$, där f och g är godtyckliga deriverbara funktioner. Här har vi alltså en term som är oberoende av x_2 och en som är oberoende av x_1. Men i distributionsmening finns ytterligare lösningar, av analogt slag fast de är distributioner: En distribution v i planet kallas oberoende av x_2 om den är given av en distribution v_1 på $\mathbb{R}$ på så sätt att för varje testfunktion ϕ i planet

$$v[\phi] = v_1 \left[\int \phi(x_1, x_2)\,dx_2 \right].$$

   Här menar vi att v_1 får verka på den 1-dimensionella testfunktionen $x_1 \mapsto \int \phi(x_1, x_2)\,dx_2$. Denna terminologi är rimlig, eftersom man lätt ser att v inte ändras av en translation i x_2-axelns riktning. Vad blir v i specialfallet $v_1 = \delta'_a$, dvs. vad blir då $v[\phi]$ för en testfunktion ϕ?

Visa nu att varje distribution som är oberoende av x_2 satisfierar ekvationen $\partial^2 u/\partial x_1 \partial x_2 = 0$ i distributionsmening.

I detta resonemang kan man förstås låta x_1 och x_2 byta roller, och i själva verket ges den allmänna distributionslösningen av en summa av två distributioner som är oberoende av x_1 resp. x_2 (detta behöver ej visas).

7. Funktionen $1/x$ på $\mathbb{R}$ är inte integrerbar nära 0, men den görs till en distribution X^{-1}, även kallad P.V. $1/x$ eller principalvärdet av $1/x$, enligt formel (9.17) på sidan 324 i Folland. Bestäm Fouriertransformen av denna distribution, på följande sätt. Verifiera att produkten $x\,X^{-1}$ som väntat är den konstanta funktionen 1; här använder vi produkten av en (lämplig) funktion och en distribution, som definieras i Follands formel (9.6). Fouriertransformera denna produkt, vilket ger den sökta Fouriertransformens derivata. Sen finner man den sökta Fouriertransformen genom att ta en primitiv distribution, så när som på en additiv konstant. (Här tillåter vi oss att utnyttja huvudövning 5, som medför att två primitiva distributioner till samma distribution bara skiljer sig med en konstant.) Bestäm slutligen den additiva konstanten genom att låta de inblandade distributionerna verka på Schwartzfunktionen e^{-x^2}, vars Fouriertransform man känner.

   Använd resultatet för att också finna Fouriertransformen av Heavisidefunktionen.

8. Distribution X^{-1}, även kallad P.V. $1/x$ eller principalvärdet av $1/x$, definieras i formel (9.17) på sidan 324 i Folland. Def-

initionen är ett sätt att göra funktionen $1/x$ till en distribution genom att hantera dess icke-integrabla singularitet i 0. Bestäm liksom i föregående övning Fouriertransformen av denna distribution, men nu med följande metod. Visa att X^{-1} är gränsvärdet i svag mening av distributionerna $u_n = \frac{x}{x^2+1/n^2}$. Bestäm sen Fouriertransformerna av u_n och deras svaga gränsvärde.

Använd resultatet för att också finna Fouriertransformen av Heavisidefunktionen.

9. Theorem 9.6 i Folland säger att varje 2π-periodisk distribution u kan utvecklas i en Fourierserie som konvergerar svagt mot u. (Folland har glömt att ange att perioden skall vara 2π.) Men för att finna koefficienterna kan man inte använda den vanliga integralformeln $(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)e^{-inx}\,dx$, eftersom denna integral i allmänhet saknar mening. Funktionen $(2\pi)^{-1}e^{-inx}\chi_{[-\pi,\pi]}(x)$ är ju inte någon testfunktion. Men man kan få koefficienterna genom att låta u verka på en testfunktion χ som i viss mening approximerar denna funktion. Detta beskrivs i Follands övning 9.3.1; genomför denna övning. Observera då tryckfelen: i definitionen av $\chi(x)$ (den första formeln i övningen) skall $(1-t)$ i exponenterna i båda integralerna vara $(2\pi - t)$. Substitutionen som nämns i del a skall vara $s = 2\pi - t$.
Ledning till del c: Tillämpa först formeln i del b på $f(x) = e^{i\ell x}$. Utgå sen från kvantiteten $F[\chi(x)e^{-ikx}]$ och ersätt F med dess Fourierserie.

10. Denna övning handlar om vilka distributioner u som löser ekvationen $\psi u = 0$ för en given oändligt deriverbar funktion ψ. Definitionen av sådana produkter ψu är Follands formel (9.6).

(a) Visa att ekvationen $\frac{1}{1+x^2}u = 0$ endast har lösningen $u = 0$. Utgå från definitionen av produkt.

(b) Verifiera att ekvationen $xu = 0$ har lösningarna $u = C\delta$, där C är en godtycklig konstant.

(c) Med hjälp av ett lemma skall vi se att ekvationen i (b) inte har några andra lösningar än dessa. Fixera en testfunktion ψ_0 med $\psi(0) = 1$.

Lemma. Varje testfunktion ϕ kan skrivas som $\phi = \phi(0)\psi_0 + x\psi$, för någon testfunktion ψ.

Givet detta lemma, anta att u löser ekvationen och låt u verka på en testfunktion ϕ. Använd lemmat för att visa att $u = C\delta$ för något C.

(d) Bevisa lemmat, t.ex. så här: Formeln i lemmat tvingar oss att välja ψ som

$$\psi(x) = \frac{\phi(x) - \phi(0)\psi_0(x)}{x} = \frac{\tilde{\psi}(x)}{x},$$

där $\tilde{\psi}$ definieras av den andra likheten. Det gäller att visa att ψ är en testfunktion. Verifiera först att $\tilde{\psi}$ är en testfunktion med den extra egenskapen att $\tilde{\psi}(0) = 0$. Vi ska alltså visa att kvoten $\tilde{\psi}(x)/x$ då också är en testfunktion. Det enda problemet är dess uppförande vid 0. Detta kan man klara genom att skriva $\tilde{\psi}(x)$ som integralen av derivatan från 0 till x och transformera till en integral från 0 till 1.

11. Den 2π-periodiska funktionen $\cot\frac{x}{2}$ definierar en 2π-periodisk distribution u om man tar dess principalvärde vid singulariteterna, alltså vid punkterna $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. För en testfunktion ϕ innebär detta att

$$u[\phi] = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x-2\pi n|>\varepsilon,\, n\in\mathbb{Z}} \cot\frac{x}{2}\,\phi(x)\,dx.$$

(a) Verifiera att detta gränsvärde existerar för varje testfunktion ϕ, så att man får en distribution.
Ledning: Utnyttja vid punkten 0 att cotangensfunktionen är udda, genom att subtrahera $\phi(0)$ från ϕ i t.ex. intervallet $[-1,1]$. Jämför med definitionen av P.V. $1/x$ i Folland, sidan 324. Motsvarande i andra punkter $2\pi n$.
(b) Enligt Theorem 9.6 på sidan 322 i Folland kan varje periodisk distribution utvecklas i Fourierserie. (Folland har glömt att ange att perioden skall vara 2π.) Bestäm utvecklingen av u.
Ledning: Visa att u är distributionsderivatan av funktionen $2\ln|\sin\frac{x}{2}|$, vars Fourierserie finns i tabell. Derivera termvis.

12. Anta ζ är ett komplext tal med $\operatorname{Im}\zeta > 0$.
(a) Bestäm Fouriertransformen $\hat{g}$, där $g(x) = \frac{1}{x^2-\zeta^2}$, exempelvis med en komplex integration.
(b) Beräkna den 1-periodiska funktionen

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x+n),$$

lämpligen genom att använda (a) och formeln i övning 9.4.15 i Folland, efter att ha gjort denna övning, som är ganska enkel. Observera att den serie man får är Fourierserien för f. Summera därefter denna serie.

13. Den klassiska vågekvationen $u_{tt} - c^2 u_{xx}$ i en rumsdimension har den allmänna lösningen $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$, där f och g är godtyckliga, två gånger deriverbara funktioner på $\mathbb{R}$. Här är $c > 0$ en konstant. Detta är välkänt och skall ej visas.

Vi skall se att samma formel ger lösningar i distributionsmening även för mycket allmännare f och g. Eftersom $f(x+ct)$ och $g(x-ct)$ kan behandlas helt analogt, nöjer vi oss med det första fallet.

(a) Visa att om f är en lokalt integrerbar funktion på $\mathbb{R}$, så är $f(x+ct)$, betraktad som funktion i (x,t)-planet, lokalt integrerbar så att den definierar en distribution i planet. Visa också att denna distribution uppfyller vågekvationen i distributionsmening.
Ledning: gör ett lämpligt variabelbyte i den integral som uppstår.

(b) Mera allmänt, om f bara antas vara en distribution på $\mathbb{R}$ kan man tolka $f(x+ct)$ som en tvådimensionell distribution och visa att den också ger en distributionslösning till vågekvationen. Genomför detta för $f = \delta$, på följande sätt. Man gör $u = \delta(x+ct)$ till en distribution genom att i den oegentliga dubbelintegralen $\int\int \delta(x+ct)\phi(x,t)\,dxdt$ utföra integrationen i x på det naturliga sättet; här är förstås ϕ en testfunktion i två variabler. Detta ger en formel för $u[\phi]$. För att se att $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ i distributionsmening, observera först att

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right) u.$$

Det räcker alltså att visa att $\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. Visa detta genom att kombinera uttrycket för $u[\phi]$, definitionen av distributionsderivator och likheten $\frac{d}{d\tau}\phi(-c\tau,\tau) = -c\phi_x(c\tau,\tau) + \phi_t(c\tau,\tau)$ (kedjeregeln).

14. För $0 < \lambda < 1$ är funktionen $x^{-\lambda}H(x)$ lokalt integrerbar och definierar en tempererad distribution kallad $X_+^{-\lambda}$. Bestäm dess Fouriertransform, exempelvis genom att först observera att $X_+^{-\lambda}$ är svaga gränsvärdet av de integrabla funktionerna $e^{-\epsilon x}x^{-\lambda}H(x)$ då $\epsilon \searrow 0$. Dessas Fouriertransformer ges enligt definitionen av integralen

$$\int_0^\infty e^{-(\epsilon+i\xi)x}x^{-\lambda}\,dx,$$

som kan beräknas med hjälp av variabeltransformationen $x' = (\epsilon + i\xi)x$. Observera då att man får en integral över en stråle i komplexa planet. För att komma tillbaka till $\mathbb{R}_+$ använder man Cauchys sats och uppskattar integralen över en cirkelbåge. Detta leder till den integral som definierar $\Gamma(z)$ för komplexa z, se BETA 12.5, sidan 287. Låt sen $\epsilon \searrow 0$. Denna uppgift är fallet $0 < \lambda < 1$ av Follands övning 9.4.12, sidan 340.

15. Övning 9.5.3 i Folland. Den handlar om att distributionslösningar till ekvationen $\Delta u = f$, där f är en "snäll" funktion, i själva verket är lösningar i vanlig mening.

16. (a) Sätt $u_N = N \sin Nx$ på $\mathbb{R}$ och betrakta denna funktion som en distribution. Visa, t ex. genom partialintegrationer, att u_N konvergerar svagt mot en distribution (vilken?) då $N \to \infty$. Skissa grafen för u_N; kan den förklara distributionskonvergensen, trots avsaknaden av punktvis konvergens? Vad händer om sin byts ut mot cos?

(b) Samma konvergensfråga för $H(x)N\cos Nx$ och för $H(x)N\sin Nx$.

(c) Samma fråga för $H(x)\frac{\sin Nx}{x}$.

Ledning för (c): I integralen av detta uttryck mot en testfunktion kan man partialintegrera på så sätt att man tar en primitiv funktion till $\frac{\sin Nx}{x}$. Utnyttja att $\int_0^M \sin t/t\,dt \to \pi/2$ då $M \to \infty$.

17. (a) Betrakta för $r > 0$ distributionen u_r på $\mathbb{R}$ definierad av

$$u_r[\phi] = r^{-3}\int_{-r}^{r}(\phi(x) - \phi(0))\,dx,$$

där ϕ är en testfunktion. Visa att u_r har ett svagt gränsvärde v då $r \to 0$, och att distributionen v ges av att $v[\phi]$ är en multipel av $\phi''(0)$. Vilken multipel får man?
Ledning: Taylorutveckla.

(b) Gör motsvarande i planet, med

$$u_r[\phi] = r^{-4}\int_{x^2+y^2<r^2}(\phi(x,y) - \phi(0,0))\,dxdy.$$

Visa att man som gränsvärde här får en multipel (vilken?) av Laplaceoperatorn i 0.

(c) Hur ser detta ut i n dimensioner?

18. Låt χ_A, χ_B och χ_C beteckna de karakteristiska funktionerna för nedanstående mängder i $\mathbb{R}^2$:
$A = \{(x_1,x_2) : x_1 < 0,\ x_2 < 0\}$
$B = \{(x_1,x_2) : x_1 + x_2 < 0\}$
$C = \{(x_1,x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$.

Dessa funktioner kan betraktas som distributioner i planet. Bestäm distributionsderivatorna

$$\partial\chi_A/\partial x_1, \qquad \partial\chi_B/\partial x_1 \qquad \text{och} \qquad \partial\chi_C/\partial x_1$$

samt andraderivatorna $\partial^2\chi_A/\partial x_1\partial x_2$ och $\partial^2\chi_B/\partial x_1\partial x_2$.

Svaret bör vara uttryck som anger hur dessa derivator verkar på en testfunktion, och uttrycken skall inte innehålla några derivator av testfunktionen.

19. Låt u vara distributionen $u = \ln|x|$ på $\mathbb{R}$.

    (a) Bestäm dilationerna $u^{[a]}$ för $a > 0$. Är u homogen, och i så fall av vilket gradtal? Se Folland sidan 311 och övning 9.1.1.

    (b) Visa att distributionsderivatan u' är den distribution X^{-1}, principalvärdet av $1/x$, som definieras i formel (9.17) på sidan 324 i Folland. Ledning: Partialintegrera, men undvik då singulariteten i 0.

    (c) Genomför (a)-delen med u ersatt av u'.

20. Den funktion på $\mathbb{R}$ som tar värdena $1/\sqrt{x}$ för $x > 0$ och 0 för $x \leq 0$ är lokalt integrerbar även vid singulariteten i 0. Därför definierar den en distribution på $\mathbb{R}$, som i Folland betecknas $X_+^{-1/2}$. Vi vill bestämma derivatan av denna distribution. Funktionens punktvisa derivata tar värdena $-x^{-3/2}/2$ för $x > 0$ och är inte lokalt integrerbar. Den definierar därför inte automatiskt någon distribution. Vi skall se att distributionsderivatan av $X_+^{-1/2}$ ändå hänger ihop med den punktvisa derivatan. Visa att denna distributionsderivata är $-X_+^{-3/2}/2$ där distributionen $X_+^{-3/2}$ ges i övning 9.3.9 i Folland, i specialfallet $\lambda = 3/2,\ k = 1$.
    Ledning. Skriv upp vad distributionsderivatans verkan på en testfunktion ϕ blir, enligt definitionen. (Jämför ev. med Folland formel (9.22) för $X_+^{-\lambda}$ på sidan 327.) För att komma härifrån till uttrycket i övning 9.3.9, partialintegrera i de två

intervallen $(\varepsilon, 1)$ och $(1, \infty)$. Som primitiv funktion till ϕ' väljer man i det förstnämnda intervallet inte ϕ utan $\phi - \phi(0)$. Sen får $\varepsilon \to 0$.