Extra övningsuppgifter i Fourieranalys, 2012/13

Här betyder θ Heavisidefunktionen, även betecknad H eller $\chi_{(0,\infty)}$. Om E är en mängd, är $\chi_E(x)$ den karakteristiska funktionen för E, alltså den funktion som är 1 då $x \in E$ och 0 annars.

1. Funktionen $f(x)$ är 2-periodisk, och $f(x) = (x+1)^2$ för $-1 < x < 1$. Utveckla $f(x)$ i komplex trigonometrisk Fourierserie. Sök en 2-periodisk lösning till ekvationen
$$2y'' - y' - y = f(x).$$

2. Funktionen $f(t)$ är 3-periodisk, och
$$f(t) = \begin{cases} t & \text{för} \quad 0 \le t \le 1, \\ 1 & \text{för} \quad 1 < t < 2, \\ 3-t & \text{för} \quad 2 \le t \le 3. \end{cases}$$
Bestäm, i form av en trigonometrisk Fourierserie, en periodisk lösning till differentialekvationen
$$y'' + 3y = f(t).$$

3. Utveckla funktionen $\cos x$ i sinusserie på intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$. Använd resultatet för att beräkna
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2}.$$

4. Låt $f(t) = 1 - t^2$ för $|t| \le 1$ och låt f vara 2-periodisk. Bestäm en begränsad lösning till
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x > 0, -\infty < t < \infty, \\ u(0,t) = f(t), & -\infty < t < \infty. \end{cases}$$

5. Lös Laplaces ekvation $\Delta u = u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} = 0$ i cirkelringen $1 < r < 2$ (polära koordinater) med randvillkoren $u(1,\theta) = 0, u(2,\theta) = f(\theta)$, där $f(\theta)$ är 2π-periodisk, och
$$f(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{\pi^2} \quad \text{för} \quad |\theta| \le \pi.$$

6. Fouriertransformera
a) $\dfrac{t}{(t^2+a^2)^2}$, b) $\dfrac{1}{(t^2+a^2)^2}$, c) $\dfrac{t}{(t^2+1)(t^2+2t+5)}$,
d) $e^{-a|t|}\sin bt \quad (a > 0, b > 0)$.

7. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen $\hat{f}(\omega) = \frac{\omega}{1+\omega^4}$. Beräkna
a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t f(t)\,dt$, b) $f'(0)$.

8. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen $\dfrac{1-i\omega}{1+i\omega}\dfrac{\sin\omega}{\omega}$. Beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$.

9. Beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx$ med hjälp av Fouriertransform.

10. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen $\dfrac{1}{|\omega|^3+1}$. Beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f * f'|^2 dt$, där $*$ betyder faltning.

11. Ange Fouriertransformen till funktionen

$$f(t) = \int_0^2 \frac{\sqrt{\omega}}{1+\omega} e^{i\omega t} d\omega.$$

Beräkna a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos t dt$, b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$.

12. Låt $f(t) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{\omega} e^{\omega^2} \cos\omega t d\omega$. Beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt$.

13. Bestäm en lösning till ekvationen

$$u'(t) + 2u(t) + e^{-2t}\int_{-\infty}^{t} e^{2\tau} u(\tau) d\tau = \delta(t).$$

14. Lös integralekvationen

$$\int_0^{\infty} e^{-\tau} u(t-\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{0} e^{\tau} u(t-\tau) d\tau = \sqrt{3} u(t) - e^{-|t|}.$$

15. Bestäm en lösning till ekvationen

$$u(t) + \int_{-\infty}^{t} e^{\tau - t} u(\tau) d\tau = e^{-2|t|}.$$

16. För ett linjärt, tidsinvariant system gäller att insignalen $\dfrac{1}{1+t^2}$ ger upphov till utsignalen $\dfrac{t}{(4+t^2)^2}$. Beräkna impulssvaret och svaret på $\cos\omega t$. Är systemet kausalt? Är det stabilt?

17. Ett linjärt, tidsinvariant system har impulssvaret $h(t) = e^{-4t^2}$. Låt $y(t)$ vara svaret på insignalen e^{-t^2}. Beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{it} h(t) y(t) dt$.

18. För ett linjärt, tidsinvariant system gäller att insignalen $\dfrac{1}{4+t^2}$ ger upphov till utsignalen e^{-2t^2}. Beräkna utsignalen (i form av en komplex Fourierserie), då insignalen är impulståget

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [2\delta(t-2n) - \delta(t-2n-1)].$$

19. Låt $x(n)$ vara N-periodisk, och

$$x(n) = \begin{cases} 1, & \text{då} \quad 0 \le n \le k-1, \\ 0, & \text{då} \quad k \le n \le N-1. \end{cases}$$

Beräkna den diskreta Fouriertransformen av x och använd Parsevals formel för att beräkna

$$\sum_{\mu=1}^{N-1} \frac{1-\cos\frac{2\pi\mu k}{N}}{1-\cos\frac{2\pi\mu}{N}}.$$

20. Bestäm den diskreta Fouriertransformen till signalen (sekvensen) $x(n) = \sin\dfrac{n\pi}{N}$, $\quad n = 0, \ldots, N-1$, och $x(n)$ N-periodisk.

21. Visa att funktionerna $\varphi_n(x) = \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\pi x} e^{inx}$ är parvis ortogonala i $L^2(\mathbf{R})$. Bestäm talen c_n så att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1+x^2} - \sum_{n=-N}^{N} c_n \varphi_n(x) \right|^2 dx$$

minimeras. Är ortogonalsystemet $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ fullständigt?

22. Bestäm den lösning $y(x)$ till $y'' - y = 0$ som minimerar $\displaystyle\int_{-1}^{1} [1 + x - y(x)]^2 dx$.

23. Bestäm samtliga egenvärden och egenfunktioner till Sturm-Liouville-problemet

$$\begin{cases} f'' + \lambda f = 0, & 0 < x < a, \\ f(0) - f'(0) = 0, & f(a) + 2f'(a) = 0. \end{cases}$$

24. Bestäm samtliga egenvärden och egenfunktioner till Sturm-Liouville-problemet

$$\begin{cases} -e^{-4x} \dfrac{d}{dx}\left(e^{4x} \dfrac{du}{dx}\right) = \lambda u, & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \end{cases}$$

Utveckla funktionen e^{-2x} i Fourierserie m.a.p. egenfunktionerna.

25. Lös problemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y, & 0 < x < 2,\ 0 < y < 1, \\ u(x, 0) = 0, & u(x, 1) = 0, \\ u(0, y) = y - y^3, & u(2, y) = 0. \end{cases}$$

26. Lös problemet

$$\begin{cases} \sqrt{1+t}\, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0, t) = 1, & u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = 1 - x^2. \end{cases}$$

27. Lös problemet

$$\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} + 20u = 0, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ u(0, y) = u(1, y) = 0, \\ u(x, 0) = 0, & u(x, 1) = x^2 - x. \end{cases}$$

28. Lös problemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t \sin x, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin 2\pi x. \end{cases}$$

29. Lös problemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0, t) = t + 1, \\ u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = 1 - x. \end{cases}$$

30. Lös Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ i området $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$, $1 < r < 2$, (polära koordinater i planet) med randvillkoren

$$\begin{cases} u = 0 \text{ för } r = 1, & u'_r = 0 \text{ för } r = 2, \\ u = 0 \text{ för } \theta = 0, & u = r - 1 \text{ för } \theta = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

31. Utveckla funktionen $\sin(2 \sin x)$ i trigonometrisk Fourierserie (reell form).

32. Ett cirkulärt membran med radie a påverkas av en periodisk yttre kraft $q \sin \omega t$ likformigt fördelad över membranet. För de transversella svängningarna har vi alltså ekvationen

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{q}{S}\sin \omega t, \quad u|_{r=a} = 0.$$

Bestäm den stationära svängningsrörelsen (dvs. en lösning av formen $u(r,t) = v(r)\sin \omega t$). Vilka är resonans(vinkel)frekvenserna?

33. Lös värmeledningsekvationen $u'_t = \Delta u \equiv \nabla^2 u$ i en cylinder med radien b. Ändytorna är isolerade, medan mantelytan $r = b$ (cylinderkoordinater) lyder avsvalningslagen $u + 2u'_r = 0$. Begynnelsetemperaturen är $u\big|_{t=0} = r^2 = x^2 + y^2$.

34. a) Bestäm en begränsad lösning av formen $u(r,t) = v(r)e^{i\omega t}$ till ekvationen

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big) - \dfrac{n^2}{r^2}u, \quad 0 < r < a, \\ u(a,t) = e^{i\omega t}, \end{cases}$$

där $n \geq 0$ är ett heltal. För vilka värden på $\omega > 0$ finns en sådan lösning?

b) Låt ω vara sådant att lösningen i a) existerar. Visa hur den kan användas för att lösa

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big) - \dfrac{n^2}{r^2}u, & 0 < r < a,\ t > 0, \\ u(a,t) = \sin \omega t, & u \text{ begränsad}, \\ u(r,0) = 0, & u_t(r,0) = 0. \end{cases}$$

Evenutellt förekommande integraler behöver inte beräknas.

35. Lös Laplaces ekvation $\nabla^2 u = 0$ i cylindern $r = \sqrt{x^2+y^2} < R,\ 0 < z < L$, då $u = 0$ för $z = 0$ och $z = L$, och $u = \sin\frac{\pi z}{L}(1 - \cos\frac{\pi z}{L})$ för $r = R$.

36. Bestäm det polynom $P(x)$ av högst andra graden som gör integralen
$\displaystyle\int_0^\infty [\sqrt{x} - P(x)]^2 e^{-x} dx$ så liten som möjligt.

37. Bestäm det polynom $P(x)$ av högst andra graden som gör integralen
$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty [x^4 - P(x)]^2 e^{-x^2/2} dx$ så liten som möjligt.

38. Bestäm det polynom $P(x)$ av högst andra graden som gör integralen
$\displaystyle\int_0^\infty [e^{x/4} - P(x)]^2 x e^{-x} dx$ så liten som möjligt.

39. Bestäm det polynom av formen $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ för vilket
$\displaystyle\int_0^1 [P(x)]^2 dx$ är så litet som möjligt.

40. Visa att $\displaystyle\int_0^1 xP_{2m}(x)dx = \frac{1}{3}\binom{3/2}{m+1}$. Vad blir $\displaystyle\int_0^1 xP_{2m+1}(x)dx$?

41. Beräkna, t.ex. med hjälp av den genererande funktionen, $H'_n(0)$, där H_n är Hermites polynom.

42. Visa följande formel för Laguerrepolynomen $L_n^\alpha(x)$, där $\alpha > -1$:

$$\frac{d}{dx}L_{n+1}^\alpha(x) = -L_n^{\alpha+1}(x).$$

Ledning: Använd den genererande funktionen.

43. Lös Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ i området $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$ med randvillkoret $u = z(x^2+y^2)$ då $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

44. Lös Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ i området $0 < a < r < b$ (sfäriska koordinater[1]) med randvillkoren

$$\begin{cases} u = 1 + \cos\theta, & \text{då } r = a, \\ u = \cos 2\theta, & \text{då } r = b. \end{cases}$$

45. Sök en begränsad lösning till

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\ u(x,0) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}, & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

46. Lös problemet

$$\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} = x, & 0 < x < 1,\ -\infty < y < \infty, \\ u'_x(0,y) = 0, & \\ u(1,y) = ye^{-|y|} & . \end{cases}$$

47. Låt f tillhöra $L^2(\mathbf{R})$ och sök en lösning till

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & -\infty < x < \infty,\ 0 < y < a, \\ u(x,0) = 0, & u(x,a) = f(x). \end{cases}$$

Visa att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,y)|^2 dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

48. Bestäm en periodisk lösning till ekvationen $y'' - y' + y = f'(t)$, där

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{för } 0 < t \leq 1, \\ t - 1 & \text{för } 1 < t < 2, \end{cases}$$

och f är periodisk med period 2. (Med $f'(t)$ avses distributionsderivatan.)

49. Om funktionen f gäller att

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{för } 0 < t < 1, \\ 1 & \text{för } 1 < t < 3, \end{cases}$$

och att $f(t)$ är 3-periodisk. Bestäm $f'(t)$ (distributionsderivatan) och utveckla $f'(t)$ i komplex triogonometrisk Fourierserie. Använd resultatet för att beräkna Fourierserieutvecklingen av $f(t)$.

50. Beräkna följande funktion (dvs beräkna summan och uttryck den m.h.a. kända funktioner)

$$f(\theta) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\theta}{(2n-1)^3}$$

51. Beräkna den komplexa Fourierserien till den 2π-periodiska funktion $f(x)$ som är lika med $x(x^2 - \pi^2)$ i $[-\pi, \pi]$. Vad är seriens summa i punkterna 2π och $3\pi/2$?

52. Lös problemet

$$\begin{cases} u_{xx} + 1 = \frac{1}{4} u_{tt}, \quad 0 < x < 2, t > 0 \\ u(0,t) = 0,\ u(x,0) = x - x^2, \\ u(2,t) = -2,\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

[1] $x = r\cos\phi\sin\theta,\ y = r\sin\phi\sin\theta,\ z = r\cos\theta$

53. Lös följande Dirichletproblem på enhetsskivan

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1$$

med $u = f$ på randen $r = 1$, där f är funktionen $f(\theta) = \sin^2\theta + \cos\theta$ (i polära koordinater)

54. Låt

$$Q_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n(1-x)^n\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Q_n är ett polynom av grad n.

(a) Bestäm den ledande termen och den konstanta termen i $Q_n(x)$.

(b) Bestäm normen $\|Q_n\|$ av $Q_n(x)$ i $L^2(0,1)$.

(c) Bevisa att $Q_n(x)$ och $Q_m(x)$ är ortogonala i $L^2(0,1)$ om $n \neq m$.

55. Funktionen $f(x)$ är kontinuerlig och har Fouriertransformen $\widehat{f}(\xi) = \frac{\ln(1+\xi^2)}{\xi^2}$. Bestäm $f(0)$ och $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

56. Bestäm lösningen $f(t)$, $t > 0$, till ekvationen

$$f''(t) - 4f'(t) + f(t) + 6\int_0^t f(\tau)d\tau = 2e^t$$

med begynnelsevillkor $f(0) = 1, f'(0) = 0$.

57. Låt $u(x,t)$ vara lösningen til begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad t > 0, 0 < x < \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Bevisa att för $t > 0$,

$$\int_0^\pi |u_t(x,t)|^2 dx \leq \int_0^\pi |g(x)|^2 dx.$$

(Ledning: Lös uppgiften med variabelseparation).

58. För vilka k kan Du garantera $f \in C^{(k)}$, där

$$(a) \qquad f(\theta) = \sum_0^\infty \frac{\cos(n\theta)}{3^n}$$

$$(b) \qquad f(\theta) = \sum_0^\infty \frac{\cos(2^n\theta)}{3^n}$$

59. Bestäm den elektrostatiska potentialen $\varphi(x,y)$ i området $D = \{(x,y) : -\infty < x < \infty,\ 0 < y < \pi\}$, om potentialen på randen är

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{om } y = 0, \quad \text{och} \quad x < 0, \\ 0, & \text{om } y = 0, \quad \text{och} \quad x > 0, \\ 0, & \text{om } y = \pi. \end{cases}$$

60. Undersök hur avbildningen $w = \frac{i(1-z)}{1+z}$ avbildar enhetscirkeln $|z| = 1$ respektive cikelskivan $|z| < 1$. Använd resultatet för att bestämma den elektrostatiska potentialn $\varphi(x,y)$, $(z = x + iy)$ i enhetscirkelskivan $|z| < 1$ med randvärdena

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} P, & \text{om } |z| = 1, \quad x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{om } |z| = 1, \quad x < 0,\ \text{eller } y < 0. \end{cases}$$

61. Låt T vara triangelområdet med hörn i $0,\ 1$ och $1+i$. Bestäm bilden av T under avbildningen $w = \frac{z}{1-z}$.

62. Bestäm den elektrostatiska potentialen $\varphi(x, y)$ i området $D = \{(x, y) : 0 < y < x\}$ om potentialen på randen är

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \alpha, & (x,y) \in \partial D, \quad x^2+y^2 > r^2, \\ \beta, & (x,y) \in \partial D, \quad x^2+y^2 \le r^2. \end{cases}$$

63. Sök en harmonisk funktion $\varphi(x, y)$ i området mellan hyperblerna $x^2 - y^2 = 1$ och $x^2 - y^2 = 4$ med randvärden $\varphi(x, y) = 2xy$ på $x^2 - y^2 = 1$ och $\varphi(x, y) = 4xy$ på $x^2 - y^2 = 4$.

64. Låt Ω vara området mellan cirkeln $x^2 + (y-2)^2 = 1$ och x-axeln. Betrakta potentialproblemet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, & \text{i } \Omega, \\ \varphi = 0, & \text{på } x\text{-axeln}, \\ \varphi = 1, & \text{på cirkeln } x^2+(y-2)^2 = 1. \end{cases}$$

Låt $z = x + iy$. a) Visa att avbildningen $w = \frac{z-i\sqrt{3}}{z+i\sqrt{3}}$ avbildar Ω på området mellan två cirklar (vilka?).

b) Lös därefter potentialproblemet.

65. För ett linjärt tidsinvariant system ger insignalen $\theta(t)e^{-2t}$ upphov till utsignalen $t^2\theta(t)e^{-3t}$. Vad blir utsignalen $y(t)$ om insignalen $x(t)$ är 2π-periodisk och $x(t) = t$ för $0 < t < 2\pi$? Ange $y(t)$ i form av en komplex Fourierserie.

66. a) Använd definitionen av faltning för att beräkna $F = f * f$, där $f = \chi_{(-a,a)}$ för något $a > 0$. Man kan här ha hjälp av en enkel, endimensionell figur. Rita också grafen för F.

b) Vad är Fouriertransformen av denna faltning?

67. Bestäm Fouriertransformen av karakteristiska funktionen för intervallet (a, b), både genom direkt beräkning och via det kända fallet $(-a, a)$.
Varning: Att se denna funktion som skillnaden mellan två translat av Heavisidefunktionen, vars Fouriertransform går att hitta i tabell, leder till ett betydligt trassligare uttryck.

Svar

1. $f(x) = \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{\pi^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(1+in\pi)}{n^2} e^{in\pi x}, \quad y = -\dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{\pi^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(1+in\pi)}{n^2(2n^2\pi^2 + in\pi + 1)} e^{in\pi x}$

2. $y(t) = \dfrac{2}{9} - \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3(1-\cos\frac{2n\pi}{3})}{\pi^2 n^2 (3 - \frac{4}{9}n^2\pi^2)} \cos\dfrac{2n\pi t}{3}$

3. $\cos x = \dfrac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{4n^2-1} \sin 2nx \quad (0 < x < \dfrac{\pi}{2})$. Summan blir $\dfrac{\pi^2}{64}$.

4. $u(x,t) = \dfrac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4(-1)^{n-1}}{n^2\pi^2} e^{-\sqrt{\frac{n\pi}{2}}x} \cos\left(n\pi t - \sqrt{\dfrac{n\pi}{2}}x\right)$

5. $\dfrac{2}{3\ln 2} \ln r + \dfrac{2}{\pi^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2(2^n - 2^{-n})} (r^n - r^{-n}) e^{in\theta}$

6. a) $-\dfrac{i\pi}{2a}\omega e^{-a|\omega|}$ b) $\dfrac{\pi}{2a^3}(1+a|\omega|)e^{-a|\omega|}$
   c) $\dfrac{\pi}{10} e^{-|\omega|}(1 - 2i sgn\omega) - \dfrac{\pi}{10} e^{-2|\omega|} e^{i\omega}\left(\dfrac{3}{2} - 2i sgn\omega\right)$
   d) $-\dfrac{4iab\omega}{(\omega^2 + 2b\omega + a^2 + b^2)(\omega^2 - 2b\omega + a^2 + b^2)}$

7. a) i b) $\dfrac{i}{2\sqrt{2}}$

8. $\dfrac{1}{2}$

9. $\pi(1 - e^{-1})$

10. $\dfrac{1}{9\pi}$

11. $\hat{f}(\omega) = \dfrac{2\pi\sqrt{\omega}}{1+\omega}$ för $0 < \omega < 2$, 0 för övrigt. a) $\dfrac{\pi}{2}$, b) $2\pi\left(\ln 3 - \frac{2}{3}\right)$

12. $\dfrac{\pi}{8}(e^2 + 1)$

13. $\theta(t)e^{-2t}\cos t$

14. $u(t) = \dfrac{1}{2} e^{-t/\sqrt{3}} \theta(t) + \dfrac{1}{2} e^{\sqrt{3}t}(1 - \theta(t))$

15. $\dfrac{3}{4} e^{-2|t|} - te^{-2t}\theta(t)$

16. $h(t) = \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$; $x(t) = \cos\omega t$ ger $y(t) = \dfrac{\omega}{4} e^{-|\omega|} \sin\omega t$; ej kausalt men stabilt.

17. $\dfrac{\pi}{2\sqrt{6}} e^{-5/96}$

18. $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[1 - \dfrac{1}{2}(-1)^n\right] e^{-n^2\pi^2/8 + 2|n|\pi} e^{in\pi t}$

19. summan blir $k(N-k)$.

20. $X(\mu) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi i\mu n/N} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{N}}{\cos\frac{2\mu\pi}{N} - \cos\frac{\pi}{N}}$

21. $c_n = \begin{cases} \pi(e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}})e^{-|n|} & \text{för } n \neq 0 \\ 2\pi(1 - e^{-\frac{1}{2}}) & \text{för } n = 0. \end{cases}$
Systemet är ej fullständigt.

22. $\dfrac{2\sinh 1}{\frac{1}{2}\sinh 2 + 1}\cosh x + \dfrac{2e^{-1}}{\frac{1}{2}\sinh 2 - 1}\sinh x$

23. Egenvärden: $\lambda_k = \nu_k^2$, där ν_k är de positiva rötterna till ekvationen $\tan \nu a = \frac{3\nu}{2\nu^2 - 1}$.
Egenfunktioner: $\nu_k \cos \nu_k x + \sin \nu_k x$.

24. $\lambda_1 = 4 - \beta_1^2$, där β_1 är den positiva roten till ekv. $\tanh \beta = \dfrac{\beta}{2}$; $u_1(x) = e^{-2x}\sinh \beta_1 x$

$\lambda_n = 4 + \beta_n^2$, där β_n, $n = 2, 3, \ldots$, är de positiva rötterna till ekv. $\tan \beta = \dfrac{\beta}{2}$; $u_n(x) = e^{-2x}\sin \beta_n x$

$$e^{-2x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{\lambda_N}[\sqrt{\lambda_n} + 2(-1)^n]}{\beta_n(\lambda_n - 2)} u_n(x)$$

25. $u(x,y) = \dfrac{1}{6}(y^3 - y) + \dfrac{2}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \sinh 2n\pi}(\sinh n\pi x + 7\sinh n\pi(2 - x))\sin n\pi y$

26. $u(x,t) = 1 - x + \dfrac{8}{\pi^3}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} e^{-\frac{2}{3}(2k+1)^2\pi^2[(1+t)^{3/2}-1]}\sin(2k+1)\pi x$

27. $u(x,y) = -\dfrac{8}{\pi^3}\sin \pi x \dfrac{\sin(\sqrt{20 - \pi^2}y)}{\sin\sqrt{20 - \pi^2}} -$

$$- \frac{8}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3}\sin(2k+1)\pi x \frac{\sinh(\sqrt{(2k+1)^2\pi^2 - 20}y)}{\sinh\sqrt{(2k+1)^2\pi^2 - 20}}$$

28. $u(x,t) = e^{-4\pi^2 t}\sin 2\pi x + 2\pi \sin 1 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2\pi^2 - 1}\left[\frac{t}{n^2\pi^2} - \frac{1}{n^4\pi^4}(1 - e^{-n^2\pi^2 t})\right]\sin n\pi x$

29.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (t+1)(1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3\pi^3}(e^{-2n^2\pi^2 t} - 1)\sin n\pi x = \\ &= (t+1)(1-x) + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{6} - \frac{x^3}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\pi^3}e^{-2n^2\pi^2 t}\sin n\pi x \end{aligned}$$

30. $u(r,\theta) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2[2(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\ln 2}(-1)^n - 1]}{(n+\frac{1}{2})\pi[(n+\frac{1}{2})^2(\frac{\pi}{\ln 2})^2 + 1]} \frac{\sinh(n+\frac{1}{2})\frac{\pi\theta}{\ln 2}}{\sinh(n+\frac{1}{2})\frac{\pi^2}{4\ln 2}}\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi \ln r}{\ln 2}$

31. $\sin(2\sin x) = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(2)\sin(2k+1)x$

32. $\dfrac{qc^2}{S\omega^2}\left(\dfrac{J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right)}{J_0\left(\frac{\omega a}{c}\right)} - 1\right)\sin \omega t.$

Resonansfrekvenserna är $\dfrac{c}{a}\alpha_{0,n}$, där $\alpha_{0,n}$, $n = 1, 2, \ldots$, är J_0:s positiva nollställen.

33. $u(r,t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8b^2[(2+\frac{b}{2})\alpha_k^2 - 2b]}{\alpha_k^2(4\alpha_k^2 + b^2)J_0(\alpha_k)} e^{-(\frac{\alpha_k}{b})^2 t}J_0\left(\frac{\alpha_k r}{b}\right)$, där α_k är de pos.rötterna till $J_0(\alpha) + \dfrac{2}{b}\alpha J_0'(\alpha) = 0$.

34. a) $v(r) = \dfrac{J_n(\omega r)}{J_n(\omega a)}$ om $J_n(\omega a) \neq 0$.

b) $u(r,t)=\dfrac{J_n(\omega r)}{J_n(\omega a)}\sin\omega t+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\dfrac{\alpha_k t}{a}J_N\Big(\dfrac{\alpha_k r}{a}\Big)$, där α_k är de positiva nollställena till $J_n(x)$, och

$$a_k=-\frac{2\omega}{a\alpha_k[J_{n+1}(\alpha_k)]^2J_n(\omega a)}\int_0^a J_n(\omega r)J_n\Big(\frac{\alpha_k r}{a}\Big)rdr\Big(=\frac{2\omega a}{(\omega^2a^2-\alpha_k^2)J_{n+1}(\alpha_k)}\Big)$$

35. $u(r,z)=\dfrac{I_0(\frac{\pi r}{L})}{I_0(\frac{\pi R}{L})}\sin\dfrac{\pi z}{L}-\dfrac{1}{2}\dfrac{I_0(\frac{2\pi r}{L})}{I_0(\frac{2\pi R}{L})}\sin\dfrac{2\pi z}{L}$

36. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{16}(3+6x-\dfrac{1}{2}x^2)$

37. $3(2x^2-1)$

38. $\dfrac{8}{81}(x^2+12)$

39. $x^3-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{5}x-\dfrac{1}{20}$

40. Med udda index $2m+1$ blir integralen $1/3$ för $m=0$ och 0 för övriga m.

41. $H'_{2k}(0)=0,\quad H'_{2k+1}(0)=2(-1)^k\frac{(2k+1)!}{k!}$, $k=0,1,\dots$

43. $u=\dfrac{2}{5}R^2z+\dfrac{3}{5}(x^2+y^2+z^2)z-z^3$

44. $u(r,\theta)=\dfrac{1}{3(b-a)}\Big(\dfrac{4ab}{r}-3a-b\Big)+\dfrac{a^2}{b^3-a^3}\Big(\dfrac{b^3}{r^2}-r\Big)\cos\theta+$
$+\dfrac{2b^3}{3(b^5-a^5)}\Big(r^2-\dfrac{a^5}{r^3}\Big)(3\cos^2\theta-1)$

45. $u(x,t)=\dfrac{4kt+1-2x^2}{(4kt+1)^{5/2}}e^{-\frac{x^2}{4kt+1}}$

46. $u(x,y)=\dfrac{1}{6}(x^3-1)+\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty\dfrac{\eta}{(1+\eta^2)^2}\dfrac{\cosh\eta x}{\cosh\eta}\sin\eta y d\eta$

47. Tips: Genom att Fouriertransformera i x-variabeln får man att lösningens Fouriertransform ges av $\hat{u}(\xi,y)=\dfrac{\sinh\xi y}{\sinh\xi a}\hat{f}(\xi)$.
Använd nu Plancherels sats för att få den sökta olikheten. Lösningen kan skrivas som
$u(x,y)=\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi y}{a}}{\cosh\frac{\pi(x-t)}{a}+\cos\frac{\pi y}{a}}f(t)dt.$

48. $y(t)=\displaystyle\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{\infty}\dfrac{n\pi-i(1-(-1)^n)}{2n\pi(n^2\pi^2-1+in\pi)}e^{in\pi t}$

49. $f'(t)=2\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\delta(t-3n-1)-\delta(t-3n)]=\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{\infty}\dfrac{2}{3}(e^{-in\frac{2\pi}{3}}-1)e^{in\frac{2\pi}{3}t}$

$$f(t)=\frac{1}{3}+\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{\infty}\frac{e^{-in\frac{2\pi}{3}}-1}{in\pi}e^{in\frac{2\pi}{3}t}$$

50. $f(\theta)=-\frac{\pi}{4}(\frac{1}{2}\theta^2-\frac{\pi}{2}\theta)$, om $\theta>0$ och $f(\theta)=-f(-\theta)$ om $\theta>0$.

51. $12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(nx)}{n^3}$. 0 resp $\frac{3}{8}\pi^3$.

52. $u(x,t)=-\frac{x^2}{2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\cos((2k+1)\pi t)\sin(\frac{(2k+1)\pi}{2}x)$

53. $u(x,y)=\frac{1}{2}(y^2-x^2)+x+\frac{1}{2}$ eller $u(r,\theta)=-\frac{1}{2}r^2\cos 2\theta+r\cos\theta+\frac{1}{2}$ (i polärkoordinater).

54. (a) ledande termen är $(-1)^n(2n)(2n-1)\ldots(n+1)$, konstanta termen är $n!$ (b) $n!/\sqrt{2n+1}$.

55. $f(0)=1,\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1.$

56. $f(t)=\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-t}.$

57.

58. (a) alla k (b) $k\le 1$

59. $\varphi(x,y)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\frac{e^x-\cos y}{\sin y}.$

60. $\varphi(x,y)=\frac{P}{\pi}\operatorname{arccot}\frac{(1-x)^2+(1-y)^2-1}{1-x^2-y^2}.$

61. Bildområdet är: $\{w=(u,v): u\ge -1,\ v\ge 0,\ (u+\frac{1}{2})^2+(v-\frac{1}{2})^2\ge\frac{1}{2}\}.$

62. $\varphi(x,y)=\alpha+\frac{\alpha-\beta}{\pi}\Big[\operatorname{arccot}\frac{(x^2-y^2)^2-4x^2y^2+r^4}{4xy(x^2-y^2)}-\operatorname{arccot}\frac{(x^2-y^2)^2-4x^2y^2-r^4}{4xy(x^2-y^2)}\Big].$

63. $\varphi(x,y)=\frac{2}{3}xy(x^2-y^2+2).$

64. a) Det sammanhängande området Ω avbildas på området mellan de koncentriska cirklarna $|w|=1$ och $|w|=2-\sqrt{3}$.

b) $\varphi(x,y)=\frac{1}{2\ln(2-\sqrt{3})}\ln\frac{x^2+(y-\sqrt{3})^2}{x^2+(y+\sqrt{3})^2}.$

65. $y(t)=\dfrac{4\pi}{27}+\displaystyle\sum_{n\neq 0}\dfrac{i2(2+in)}{n(3+in)^3}.$

66. a) $F(x)=2a-|x|$ om $|x|<2a$, annars 0 b) $\hat{F}(\xi)=4\,\dfrac{\sin^2 a\xi}{\xi^2}.$

67. $\dfrac{e^{-ia\xi}-e^{-ib\xi}}{i\xi}$ eller $2\,e^{-i(a+b)\xi/2}\,\dfrac{\sin(b-a)\xi/2}{\xi}$, som är samma sak.