Matematiska vetenskaper
Chalmers & GU
2011/12

Om likformig konvergens och om Eulerekvationer

Peter Sjögren

1 Likformig konvergens

Låt en följd $(f_n)_1^\infty$ av funktioner vara given, alla definierade på ett intervall $I \subset \mathbb{R}$. Det kan då hända att funktionsvärdena $f_n(x)$ i varje punkt $x \in I$ konvergerar mot ett gränsvärde, som i allmänhet beror av x och som alltså ges som $f(x)$, för någon funktion f också definierad på I. Detta kallar man punktvis konvergens. Observera att vi inte jämför konvergenshastigheten i olika punkter x. Enligt definitionen av gränsvärde betyder punktvis konvergens att det för varje $x \in I$ är så att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett heltal $N > 0$ sådant att $n > N$ medför $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Här får alltså N bero av både ε och x.

Likformig konvergens däremot innebär att N bara får bero av ε, alltså att givet $\varepsilon > 0$ finns det ett N som duger för alla punkter x i intervallet. Så här blir den formella definitionen.

Definition. *Funktionsföljden $(f_n)_1^\infty$ säges konvergera likformigt mot f i intervallet I om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett heltal $N > 0$ sådant att olikheten $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ gäller för alla $x \in I$ så snart $n > N$.*

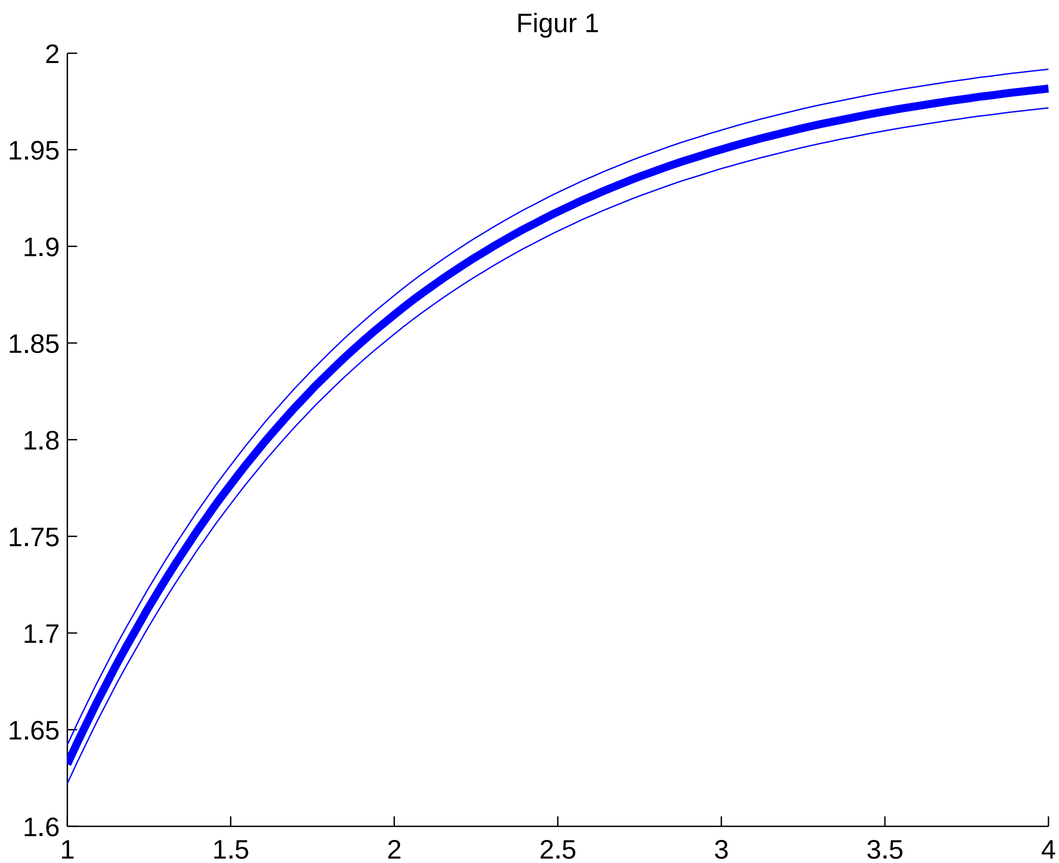
[För den som gillar formler med logiska kvantifikatorer kan dessa begrepp skrivas koncist. Punktvis konvergens uttrycks med formeln

$$\forall x \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0\,; \quad n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Här står semikolon ; för "sådant att".

För att definiera likformig konvergens använder vi samma formel, men med den viktiga skillnaden att vi flyttar in kvantifikatorn $\forall x \in I$ så att detta kommer efter $\exists N > 0$, alltså

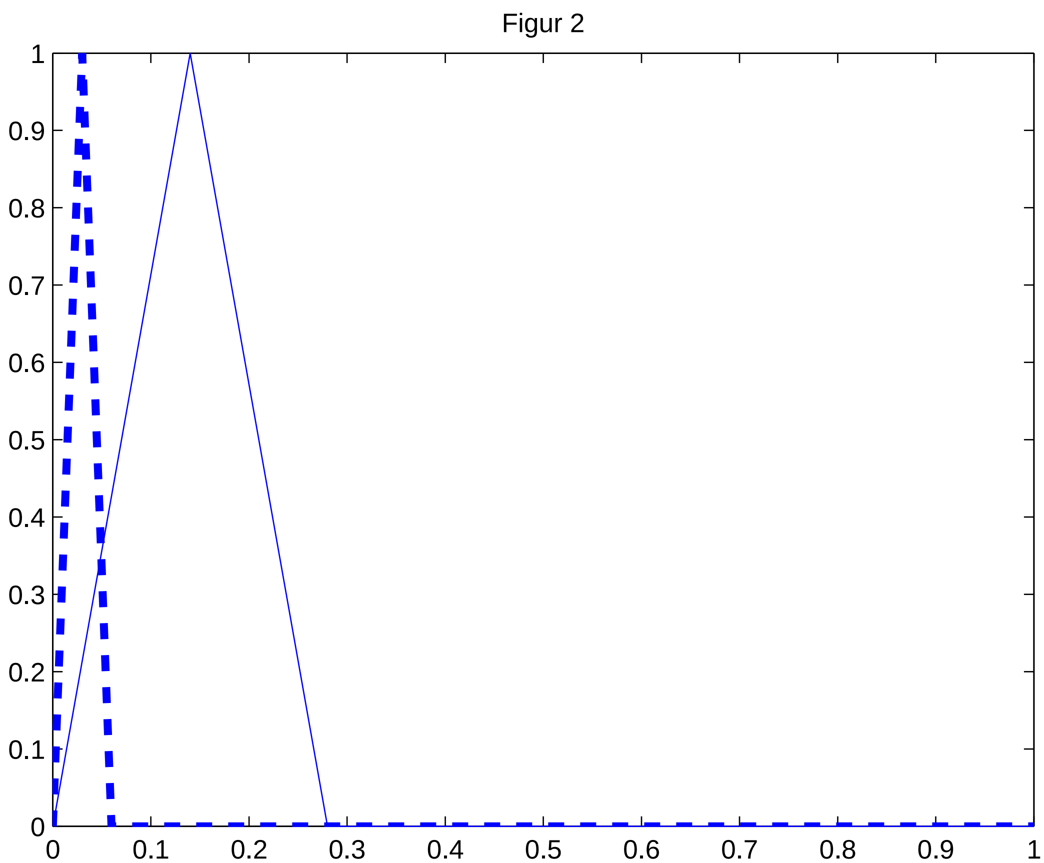
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0\,; \quad \forall x \in I \quad n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$



Det avgörande är alltså ordningen mellan $\forall x$ och $\exists N$. Ordningen mellan $\forall x$ och $\forall \varepsilon$ i den första formeln spelar däremot ingen roll.]

Likformig konvergens är alltid knuten till ett intervall, eller en mängd. En följd kan mycket väl konvergera likformigt i ett intervall men inte i ett annat, större intervall. Observera att likformig konvergens är starkare än punktvis konvergens, dvs. likformig konvergens medför punktvis konvergens. Vi skall strax se att den omvända implikationen inte gäller.

Likformig konvergens illustreras av figur 1, där den tjocka kurvan representerar gränsfunktionen f och de två andra är kurvorna för funktionerna $f \pm \varepsilon$, med något litet värde på ε (bandets *vertikala* bredd är konstant). Att f_n konvergerar likformigt mot f innebär att om vi går långt bort i följden,



alltså väljer n stort, kommer kurvan för f_n att ligga helt inne i bandet. Detta ska gälla för alla sådana band, dvs. för alla $\varepsilon > 0$.

Ett ekvivalent, åskådligt och ofta användbart sätt att beskriva likformig konvergens är

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad \text{då} \quad n \to \infty.$$

Lägg märke till att f_n konvergerar mot f om och endast om $f_n - f$ konvergerar mot 0-funktionen, och detta för såväl punktvis som likformig konvergens. Det är alltså ingen stor inskränkning att anta att gränsfunktionen f är 0, något som förenklar situationen.

Vi kan nu ge exempel på en följd som konvergerar punktvis men inte likformigt på intervallet $I = [0, 1]$. Figur 2 visar två av funktionerna i följden.

Definiera h_n som den kontinuerliga funktion på $[0,1]$ som tar sitt största värde 1 i punkten $\frac{1}{n}$, är 0 i punkten 0 samt i intervallet $[\frac{2}{n}, 1]$ och är linjär däremellan. De likbenta trianglarna i figuren blir alltså allt smalare då n växer. Låt oss först se att denna funktionsföljd konvergerar punktvis mot 0. Då ska vi fixera en godtycklig punkt x i intervallet. Ifall $x = 0$ är alla värdena $h_n(x) = 0$ och konvergensen är trivial. Om $x > 0$ ser vi att trianglarna för stora n-värden hamnar till vänster om x, så att $h_n(x)$ blir 0. Alltså konvergerar följden $(h_n(x))$ mot 0, och den punktvisa konvergensen är klar. Likformig konvergens skulle däremot innebära att kurvorna för h_n för stora n-värden ligger inom ett smalt band kring 0-funktionen. Det är uppenbart falskt, så funktionerna konvergerar inte likformigt mot 0 på $[0,1]$. Observera att detta hänger ihop med att vi när vi här verifierade den punktvisa konvergensen i punkter $x > 0$ mycket nära 0 måste ta till allt större n för att få triangeln att hamna till vänster om x. (Däremot konvergerar denna funktionsföljd likformigt mot 0 i intervallet $[\delta, 1]$, för varje givet $\delta > 0$.)

Punktvis konvergens $f_n \to f$ räcker inte för att garantera att integralen av f_n konvergerar mot integralen av f; vi skall snart se exempel på detta. Men likformig konvergens räcker om man integrerar över ett begränsat intervall, enligt följande sats.

Sats 1. *Anta att funktionerna f_n, $n = 1, 2, \ldots$ är kontinuerliga på intervallet $[a, b]$, där a och b är ändliga. Om f_n konvergerar likformigt mot f i detta intervall, så gäller*

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{\textit{då}} \quad n \to \infty.$$

Bevis. Vi uppskattar skillnaden mellan integralerna med triangelolikheten, enligt

$$|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \le (b-a) \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|,$$

och den sista kvantiteten här går mot 0 då $n \to \infty$. $\square$

Ett exempel där konvergens inte gäller för integralerna trots att man har punktvis konvergens finns i figur 3. Funktionerna här är $nh_n(x)$; man multiplicerar alltså funktionerna $h_n(x)$ från figur 2 med faktorer n, så att alla trianglarna får samma area 1. Det betyder ju att alla funktionerna $nh_n(x)$

har integral 1. Men precis som för $h_n(x)$ nyss ser man att även $nh_n(x)$ konvergerar punktvis mot 0-funktionen i hela intervallet $[0,1]$.

Lägg märke till att vi var tvungna att låta funktionerna ta allt större värden för att åstadkomma detta exempel. Följande sats säger nämligen bland annat att slutsatsen i satsen ovan gäller så snart man har punktvis konvergens och alla funktionernas grafer ryms inom en och samma rektangel, dvs det finns ett $M > 0$ sådant att $|f_n(x)| \leq M$ för alla n och x. I den allmänna versionen kan intervallet (a,b) vara obegränsat, och man ska kunna majorera alla funktionerna inte med en konstant M utan med en funktion $g \geq 0$ som är integrabel på intervallet, så här:

Sats 2 (Dominerade konvergenssatsen)**.** *Anta att funktionerna f_n, $n = 1,2,\ldots$ är integrabla på intervallet $[a,b]$ och konvergerar punktvis mot funktionen f på $[a,b]$. Om det dessutom finns en funktion $g \geq 0$ på intervallet med $\int_a^b g(x)\,dx < \infty$ sådan att $|f_n(x)| \leq g(x)$ för alla $x \in [a,b]$ och alla n, så gäller*

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx, \quad \textit{då} \quad n \to \infty.$$

I fallet med graferna som ryms i en rektangel ovan kan man alltså välja $g(x) = M$. Vi måste avstå från att bevisa denna sats, eftersom beviset använder ett utvidgat integralbegrepp.

Följande sats säger att likformig konvergens bevarar kontinuitet, vilket ibland är användbart.

Sats 3. *Om funktionerna f_n, $n = 1,2,\ldots$ är kontinuerliga på intervallet I och där konvergerar likformigt mot funktionen f, så är också f kontinuerlig på I.*

Även för *funktionsserier* såsom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ kan man tala om likformig konvergens. Denna serie säges konvergera likformigt mot $F(x)$ i intervallet I, om partialsummorna $\sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ konvergerar likformigt mot $F(x)$ i I då $N \to \infty$.

Sats 4 (Weierstrass majorantsats eller M-test)**.** *Anta att funktionerna f_n, $n = 1,2,\ldots$ är definierade på intervallet I och konvergerar punktvis mot funktionen f på $[a,b]$. Om det finns tal $M_n > 0$ sådana att $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ och $|f_n(x)| \leq M_n$ för alla $x \in I$, så konvergerar funktionsserien $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ likformigt och absolut på I.*

Ordet “absolut” innebär här att även serien $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ konvergerar likformigt på I. För beviset hänvisar vi till tidigare kurslitteratur.

Denna sats kan användas för Fourierserier. Om nämligen koefficienterna c_n är så små att $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$, ger satsen att Fourierserien $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ konvergerar likformigt och absolut, på hela $\mathbb{R}$. (Summan tas här över alla heltal, så man tillämpar satsen på summan över de positiva heltalen och den över de negativa separat.) Det här fungerar också för cosinus- och sinusserier. Fourierkoefficienterna för en 2π-periodisk funktion uppfyller detta villkor om funktionen är kontinuerlig och styckvis glatt. Fourierserien för sådana funktioner konvergerar alltså likformigt och absolut på hela $\mathbb{R}$, vilket är vad Theorem 2.5 sid 41 i Follands bok säger.

2 Eulerekvationer

Eulerekvationer kallar man ordinära differentialekvationer av formen

$$x^2 y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0, \tag{1}$$

där $x > 0$, och a och b är konstanter. Sådana bör man känna igen när man stöter på dem, eftersom det är lätt att ange den allmänna lösningen. Om man nämligen sätter $x = e^t$ och betraktar y som en funktion av t, får man efter en liten kalkyl i stället ekvationen

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + A\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + By = 0. \tag{2}$$

Denna kalkyl utför vi inte här; det räcker att veta att den finns. I (2) är $A = a - 1$ och $B = b$, men det viktiga är att (2) är en ekvation med konstanta koefficienter. Som bekant blir därför lösningarna till (2) i allmänhet linjärkombinationer av två funktioner av typ $e^{\gamma t}$, och översatt till x blir det x^{γ}. Detta gör att den lösningsmetod man i praktiken använder för en Eulerekvation är att ansätta $y = x^{\gamma}$. Instoppat i ekvationen ger det

$$\gamma(\gamma - 1)x^{\gamma} + a\gamma x^{\gamma} + bx^{\gamma} = 0,$$

eller helt enkelt $\gamma(\gamma-1)+a\gamma+b = 0$. Denna andragradsekvation sammanfaller med den karakteristiska ekvationen för (2). Dess rötter kallar vi γ_1 och γ_2. Om $\gamma_1 \neq \gamma_2$, är den allmänna lösningen till Eulerekvationen $y(x) =$

$c_1x^{\gamma_1}+c_2x^{\gamma_2}$. Om däremot $\gamma_1 = \gamma_2$ dvs. andragradsekvationen har dubbelrot, blir den allmänna lösningen $y(x) = c_1x^{\gamma_1} + c_2x^{\gamma_1}\ln x$. Detta är i båda fallen en direkt översättning från t till x av den kända lösningen för ekvation (2). Rötterna γ_1 och γ_2 behöver förstås inte vara reella.

Exempel 1.

$$x^2y''(x) + xy'(x) + 4y(x) = 0.$$

Ansatsen $y = x^\gamma$ ger efter division med x^γ

$$\gamma(\gamma - 1)x^\gamma + \gamma x^\gamma + 4x^\gamma = 0,$$

med rötter $\gamma = \pm 2i$. Eftersom rötterna är olika, vet man då att den allmänna lösningen är

$$y(x) = c_+x^{2i} + c_-x^{-2i} = c_+e^{2i\ln x} + c_-e^{-2i\ln x}.$$

Lägg märke till att detta också kan skrivas

$$y(x) = c\cos(2\ln x) + d\sin(2\ln x)$$

med nya konstanter c och d.

Exempel 2.

$$x^2y''(x) + xy'(x) = 0.$$

Ekvationen för γ blir nu $\gamma^2 = 0$, med dubbelrot $\gamma = 0$. Då blir den allmänna lösningen enligt ovanstående $y(x) = c_1 + c_2\ln x$. Det kan man också se direkt i detta fall. Efter division med x kan ekvationen nämligen skrivas $(xy'(x))' = 0$, vilket är ekvivalent med att $xy'(x)$ är konstant, säg c_2. Men det betyder ju $y'(x) = c_2/x$, och integration ger $y(x) = c_2\ln x + c_1$ igen.