MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Datum: 2014-01-18
Skrivtid: 8.30 - 13.30
Telefon: Anna Persson 0703-088304

Tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2 och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Hjälpmedel: Godkänd räknedosa, BETA samt "Några tips om Fourierserier m.m. i BETA, 2014" (två sidor).
Maxpoäng står inom parentes efter varje uppgift, med summa 50.
Betygsgränser: betyg 3: 23, betyg 4: 31, betyg 5: 39.
Svar i form av svårberäknade integraluttryck kan i vissa fall accepteras eller åtminstone ge poäng.

1. Lös problemet

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < \ell,\ \ t > 0 \\ u_x(0,t) = 0,\ \ u_x(\ell,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = x - x^2, & 0 < x < \ell. \end{cases}$$

(8)

2. Funktionen f ges av $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} \cos n\pi x$. Beräkna $\int_0^3 f(x)\,dx$ och $\int_0^3 f(x)^2\,dx$. (2+6)

3. Finn en lösning $u = u(x,t)$ till ekvationen $u_{xx} = u_{tt} - 2u_t + u$ i området $x > 0,\ t > 0$ som uppfyller $u(0,t) = \sin t,\ t > 0$, och $u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ x > 0$. (8)

4. Ett linjärt tidsinvariant dynamiskt system svarar med utsignalen $\chi_{(c-b,\,c+b)}$ på insignalen $\chi_{(-a,\,a)}$. Här är $a,\ b > 0$ och $c \in \mathbb{R}$, och som vanligt betecknar χ_I för ett intervall I den funktion som har värdet 1 på I och 0 utanför I. Ange systemfunktionen. Vad blir svaret på insignalen $\sin \alpha t$? (3+5)

5. Lös ekvationen $\Delta u = 0$ i halvcylindern

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1,\ y > 0,\ 0 < z < L\}$$

med randvärdena $u(x, y, 0) = xy$ för $x^2 + y^2 < 1,\ y > 0$ och $u = 0$ på de övriga delarna av randen. (8)

6. Låt f och g vara kontinuerliga funktioner på $\mathbb{R}$, båda 0 utanför ett begränsat intervall, och anta att $\int g(x)\, dx = 1$. Sätt $g_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} g(\frac{x}{\epsilon})$ för $\epsilon > 0$. Mot vad konvergerar faltningen $f * g_\epsilon(x)$ då $\epsilon \to 0$? Bevisa konvergensen. (2+3)

7. Ge exempel på ett fullständigt och ett ofullständigt ortogonalsystem i något L^2-rum (ange vilket), båda bestående av oändligt många vektorer. Motivera ofullständigheten i det valda exemplet. (1+2+2)