MATEMATISKA VETENSKAPER Datum: 2014-01-18
Chalmers

LÖSNINGAR TILL tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2 och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Uppgift 1.
Detta är ett standardproblem för variabelseparation. Vi söker separerade lösningar $u(x,t) = X(x)T(t)$ till differentialekvationen och randvillkoren (ej initialvillkoret) och får på vanligt sätt att

$$\frac{1}{k}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda,$$

för någon konstant λ, och $X'(0) = X'(\ell) = 0$.

För X har vi nu en situation som vi känner igen. Man betraktar som vanligt de tre fallen $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ och $\lambda < 0$. Resultatet blir att $\lambda = -(n\pi/\lambda)^2$ för något $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ och att $X(x)$ är (proportionell mot) $\cos n\pi x/\ell$.

Eftersom $T'(t) = k\lambda T(t)$. ser vi att $T(t)$ är (proportionell mot) $\exp(k\lambda t) = \exp(-kn^2t/\ell^2)$.

Som separabla lösningar har vi därför

$$\cos\frac{n\pi x}{\ell}\exp\left(-\frac{kn^2t}{\ell^2}\right). \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Nu ansätter vi som lösning u en linjärkombination av dessa, alltså

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell}\exp\left(-\frac{kn^2t}{\ell^2}\right). \tag{1}$$

Det återstår att använda initialvillkoret för att bestämma koefficienterna a_n. Det ger

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} = x - x^2, \quad 0 < x < \ell.$$

Vi skall alltå utveckla högerledet här i cosinusserie i $(0, \ell)$. Det är detsamma som att utveckla den jämna fortsättningen av högerledet i det symmetriska intervallet $(-\ell, \ell)$.

Termen x^2 är jämn, och dess utveckling hittar man i BETA 13.1 (13):

$$x^2 = \frac{\ell^2}{3} + \frac{4\ell^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{\ell}.$$

Fortsättningen av termen x blir förstås $|x|$ i $(-\ell, \ell)$. Dess utveckling finner man i BETA 13.1 (3) med $\alpha = 1$ och $h = L = \ell$ eller, kanske något enklare, BETA 13.1 (6), som med $h = L = \ell$ ger utvecklingen av $\ell - x$. Se också "Några tips om Fourierserier mm. i BETA, 2014". I varje fall blir resultatet

$$x = \frac{\ell}{2} - \frac{4\ell}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \cos \frac{(2m-1)\pi x}{\ell}.$$

Genom att bilda skillnaden mellan dessa två serier får vi koefficienterna a_n, med olika uttryck för udda och jämna n:

$$a_0 = \frac{\ell}{2} - \frac{\ell^2}{3}$$

och

$$a_{2m} = -\frac{\ell^2}{\pi^2} \frac{1}{m^2}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

samt

$$a_{2m-1} = \frac{4(\ell^2 - \ell)}{\pi^2} \frac{1}{(2m-1)^2}, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Svaret på uppgiften blir (1) med ovanstående värden på a_n.

Uppgift 2.

För att verifiera att man kan beräkna den första integralen genom att integrera termvis uppskattar vi absolutbeloppen av termerna i denna funktionsserie. Man har

$$|3^{-n} \cos n\pi x| \leq 3^{-n}.$$

Eftersom $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} < \infty$, säger Weierstrass majorantsats (M-test) att funktionsserien konvergerar likformigt, på hela $\mathbb{R}$. Likformigheten medför att termvis integration är tillåten, så

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} \int_0^3 \cos n\pi x\,dx.$$

Integralen i högerledet är $\frac{1}{n\pi}[\sin n\pi x]_0^3 = 0$, förutsatt att $n \neq 0$. För $n = 0$ blir integralen 3, så $\int_0^3 f(x)\,dx = 3$.

För att beräkna $\int_0^3 f(x)^2\,dx$ kan man använda Parsevals formel, eftersom vi har en Fourierserie. Om man hämtar Parsevals formel ur BETA 13.1 sidan 312, får man att

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)^2\,dx = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{2},$$

där

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega x$$

och $\Omega = 2\pi/T$. (Här förutsätts allt vara reellvärt.) I vårt fall har vi $\Omega = \pi$, så $T = 2$. Formeln ger alltså integralen av $f(x)^2$ över ett intervall av längd 2, som är perioden för f. För att få integralen över $(0,3)$ observerar vi att f är jämn, så att

$$\int_0^3 f(x)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{-3}^3 f(x)^2\,dx = \frac{3}{2}\int_0^2 f(x)^2\,dx,$$

den sista likheten eftersom $(-3,3)$ är tre perioder. Koefficienterna ges av $a_0 = 2$ och $a_n = 3^{-n}$ för $n \geq 1$, så Parseval säger att

$$\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)^2\,dx = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-2n} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{1-1/9} = \frac{17}{16}.$$

Vi får

$$\int_0^3 f(x)^2\,dx = \frac{51}{16}.$$

Alternativ. Eftersom BETA inte är särskilt användarvänlig här, kan man i stället utgå från ortogonaliteten. Man vet att funktionerna $\cos nx$, $n = 0, 1, ...,$ bildar ett ortogonalsystem på $(0, \pi)$, så att $\cos n\pi x$, $n = 0, 1, ...,$ är ortogonala på $(0, 1)$. Det sistnämnda systemet är ortogonalt även på $(1, 2)$ och $(2, 3)$, eftersom en translation med π betyder teckenbyte för cosinusfunktionen. Alltså är $\cos n\pi x$ ortogonala även på $(0, 3)$. Det betyder att om man utvecklar kvadraten

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} \cos n\pi x\right)^2$$

och integrerar, kommer bara diagonaltermerna att överleva integrationen och ge bidrag till integralens värde. Det innebär att

$$\int_0^3 f(x)^2\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-2n} \int_0^3 \cos^2 n\pi x\,dx.$$

Integralerna i högerledet räknar man ut genom att gå över till "dubbla vinkeln", eller också vet man att medelvärdet av $\cos^2$ i sådana här fall blir $1/2$. Man får $\int_0^3 \cos^2 n\pi x\,dx = 3/2$ för $n > 0$. Men observera att för $n = 0$ är denna integral i stället 3. Det följer att

$$\int_0^3 f(x)^2\,dx = 3 + \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-2n} = 3 + \frac{3}{2}\frac{1}{9}\frac{1}{1-1/9} = \frac{51}{16}.$$

Anm. Man kan räkna ut f explicit, genom att skriva om sinusfunktionerna i termer av $e^{\pm i \cdots}$ och summera geometriska serier. Eller också kan man slå upp serien i BETA 13.1(29). Men detta gör det knappast enklare att beräkna integralerna.

Uppgift 3.

Området är en kvadrant, och de två initialvillkoren för $t = 0$ är homogena. Därför är det rimligt att försöka med Laplacetransformen i t-variabeln.

Sätt alltså $U(x,z) = \mathcal{L}u(x,z)$. Initialvillkoren gör att Laplacetransformerna av u_t och u_{tt} blir zU resp. z^2U. Den transformerade differentialekvationen blir därför

$$U_{xx}(x,z) = (z^2 - 2z + 1)U(x,z).$$

För fixt z har vi här en ordinär differentialekvation i x-variabeln. Dess karakteristiska ekvation är $r^2 = z^2 - 2z + 1$, dvs. $r^2 = (z-1)^2$ med rötter $r = \pm(z-1)$. Det räcker att betrakta stora positiva, reella värden på z (eftersom Laplacetransformen är en analytisk funktion av z, som är entydigt bestämd av sina värden för sådana z). Den allmänna lösningen till den ordinära differentialekvationen är då

$$U(x,z) = ae^{(z-1)x} + be^{-(z-1)x},$$

där "konstanterna" a och b är oberoende av x men kan bero av z. Den första termen har ett så snabbt växande för stora x och z att vi förkastar den; uppgiften går ut på att hitta *en* lösning till problemet. Vi sätter alltså $a = 0$.

Nu Laplacetransformerar vi randvillkoret för $x = 0$ och får enligt BETA 13.5, L24 att

$$U(0,z) = \frac{1}{1+z^2}.$$

Om vi jämför med uttrycket för $U(x,z)$ ovan, ser vi att $b = 1/(1+z^2)$, så att

$$U(x,z) = e^x e^{-zx} \frac{1}{1+z^2}.$$

För att finna den inversa Laplacetransformen av detta observerar vi att multiplikation av en Laplacetransform med e^{-cz} motsvarar translation på funktionssidan; se BETA 13.5, L4. Här är c en konstant, i vårt fall är $c = x$. Eftersom $1/(1+z^2)$ är Laplacetransformen av $\sin t$, får vi svaret

$$u(x,t) = e^x \sin(t-x)\, \chi_{\{t>x\}},$$

där den sista faktorn är 1 då $t > x$ och annars 0.

Anm. 1 Vi behövde aldrig utnyttja att Laplacetransformen av $\sin t$ är $1/(1+x^2)$. Det hade gått bra att bara skriva $\mathcal{L}(\sin t)(z)$.

Anm. 2 Ett alternativ är att sätta $v(x,t) = e^{-t}u(x,t)$, som visar sig satisfiera den vanliga vågekvationen.

Uppgift 4.
Vi Fouriertransformerar de givna in- och utsignalerna, och får

$$\hat{\chi}_{(-a,\,a)}(\omega) = 2\,\frac{\sin a\omega}{\omega},$$

med en enkel uträkning eller med BETA 13.2, F50, och

$$\hat{\chi}_{(c-b,\,c+b)}(\omega) = 2e^{-ic\omega}\,\frac{\sin b\omega}{\omega},$$

där vi också använde den enkla regeln för Fouriertransformen av ett translat, se BETA 13.2, F7. Systemfunktionen h är kvoten mellan Fouriertransformerna för utsignal och insignal, och den blir alltså

$$h(\omega) = e^{-ic\omega}\,\frac{\sin b\omega}{\sin a\omega}.$$

Om impulssvaret betecknas H, är $h = \hat{H}$, och svaret på insignalen $\sin \alpha t$ är faltningen $H * \sin \alpha t$, vars värde i t är

$$\int H(s) \sin \alpha(t-s)\, ds = \frac{1}{2i} \int H(s)(e^{i\alpha(t-s)} - e^{-i\alpha(t-s)})\, ds$$
$$= \frac{1}{2i}(e^{i\alpha t}\hat{H}(\alpha) - e^{-i\alpha t}\hat{H}(-\alpha)) = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha(t-c)} - e^{-i\alpha(t-c)})\frac{\sin b\alpha}{\sin a\alpha}.$$

Det sista uttrycket, som också kan skrivas

$$\frac{\sin b\alpha}{\sin a\alpha}\,\sin \alpha(t-c),$$

är den efterfrågade utsignalen.

Uppgift 5.
Differentialekvationen är homogen, liksom alla randvillkoren utom det för $z = 0$ (halvcylinderns botten). Därför variabelseparerar vi lämpligen i cylinderkoordinater (r, θ, z). Då söker vi u av formen

$$u(x, y, z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z),$$

som ska uppfylla differentialekvationen och alla randvillkoren utom det för $z = 0$. Randvillkoren ger då att $R(1) = \Theta(0) = \Theta(\pi) = Z(L) = 0$. Differentialekvationen blir på vanligt sätt

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0.$$

Detta medför att kvantiteten

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)}$$

måste vara konstant, säg λ. Då blir

$$Z''(z) = -\lambda Z(z)$$

och

$$\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} - \lambda r^2 = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}.$$

Även detta måste vara konstant, säg μ. Eftersom då $\Theta''(\theta) = -\mu\Theta(\theta)$ och Θ är 0 i punkterna 0 och π, följer det på känt sätt att $\mu = n^2$ och att $\Theta(\theta)$ är proportionell mot $\sin n\theta$ för något $n = 1, 2, \ldots$.

Då får vi för R ekvationen

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - (\lambda r^2 + n^2)R(r) = 0.$$

För $\lambda > 0$, säg $\lambda = \nu^2$ med $\nu > 0$, har vi här den modifierade Besselekvationen, med lösningar som är linjärkombinationer av $I_n(\nu r)$ och $K_n(\nu r)$. Men $K_n(\nu r)$ är obegränsad vid 0 och förkastas därför, och $I_n(\nu r)$ har inget nollställe på $\mathbb{R}_+$, vilket inte går ihop med randvillkoret för $r = 1$. Därför förkastas dessa lösningar.

Om $\lambda = 0$ har vi en Eulerekvation, och ansatsen $R(r) = r^\gamma$ ger lösningar $r^{\pm n}$. Dessa förkastas av liknande skäl som i föregående fall.

Om $\lambda > 0$ skriver vi $\lambda = -\nu^2$ med $\nu > 0$ och har Bessels ekvation för R. Lösningarna är linjärkombinationer av $J_n(\nu r)$ och $Y_n(\nu r)$, och $Y_n(\nu r)$ förkastas pga. singulariteten i 0. Då återstår $J_n(\nu r)$, som skall vara 0 för $r = 1$. Det betyder att ν måste vara ett av nollställena $\lambda_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots,$ för J_n på $\mathbb{R}_+$. Alltså är $R(r) = \text{konst.}\, J_n(\lambda_{n,k} r)$.

För Z har vi nu ekvationen $Z''(z) = \lambda_{n,k}^2 Z(z)$. En bas för lösningsrummet till denna ekvation ges av $\cosh \lambda_{n,k} z$ och $\sinh \lambda_{n,k} z$; en annan, som är mera praktisk att använda för oss, är $\cosh \lambda_{n,k}(L-z)$, $\sinh \lambda_{n,k}(L-z)$. Eftersom $Z(L) = 0$ blir bara $\sinh \lambda_{n,k}(L - z)$ kvar.

Vi kan nu ange de separerade lösningarna, nämligen

$$J_n(\lambda_{n,k} r) \sin n\theta \sinh \lambda_{n,k}(L - z), \qquad n, k = 1, 2, \ldots.$$

Som lösning till hela problemet ansätter vi då

$$u(r, \theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} J_n(\lambda_{n,k} r) \sin n\theta \sinh \lambda_{n,k}(L - z).$$

För att bestämma koefficienterna $a_{n,k}$ använder vi randvillkoret för $z = 0$, som ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} J_n(\lambda_{n,k} r) \sin n\theta \sinh \lambda_{n,k} L = r^2 \cos\theta \sin\theta.$$

Summan i n kan vi här se som en Fourier-sinusserie i θ-variabeln. För att utveckla högerledet i en sådan serie skriver man det lämpligen som $\frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta$. Det betyder att man bara har koefficienter med $n = 2$, dvs. att $a_{n,k} = 0$ så snart $n \neq 2$. Då återstår ekvationen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2,k} J_2(\lambda_{2,k} r) \sinh \lambda_{n,k} L = r^2/2.$$

Detta är en utveckling i ortogonalsystemet $J_2(\lambda_{2,k} r)$, $k = 1, 2, \ldots,$ på intervallet $(0, 1)$, med vikten r. Med hjälp av

BETA 12.4, (i) på sidan 275, blir därför

$$a_{2,k} = \frac{1}{J_3(\lambda_{2,k}) \sinh \lambda_{n,k} L} \int_0^1 r^3 J_2(\lambda_{2,k} r)\, dr.$$

Svaret på uppgiften är alltså

$$u(r, \theta, z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2,k} J_n(\lambda_{n,k} r) \sin n\theta \sinh \lambda_{n,k}(L - z),$$

med ovanstående $a_{2,k}$.