

## Tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2 och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Hjälpmedel: Godkänd räknedosa, BETA samt "Några tips om Fourierserier m.m. i BETA, 2014" (två sidor).

Maxpoäng står inom parentes efter varje uppgift, med summa 62.

Betygsgränser: betyg 3: 30, betyg 4: 40, betyg 5: 50.

1. Utveckla funktionen  $f(x) = x^2$  i sinusserie i intervallet  $[0, \ell]$ , där  $\ell$  är en positiv konstant. Ange också i vilka punkter serien konvergerar och vad dess summa är, och förklara varför. (5+3)
2. Lös problemet

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < \ell, \quad t > 0 \\ u_x(0, t) = 2, \quad u(\ell, t) = 1, & t > 0 \\ u(x, 0) = 2(x - \ell), & 0 < x < \ell. \end{cases}$$

Här är  $k$  och  $\ell$  positiva konstanter. (8)

3. Betrakta följande Sturm-Liouville-problem i intervallet  $[0, 3]$ :

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) - y(0) = 0, \quad y(3) = 0.$$

Hur många egenvärden med  $\lambda < 2$  finns det? (9)

4. Finn en lösning  $u = u(x, t)$  till ekvationen  $u_t = ku_{xx} - bu_x$  i övre halvplanet  $\{(x, t) : t > 0\}$ , med initialvärden  $u(x, 0) = f(x)$  för  $x \in \mathbb{R}$ . Här är  $f \in L^1(\mathbb{R})$  en given funktion, och  $b \in \mathbb{R}$  och  $k > 0$  är konstanter. Svara med ett så explicit uttryck som möjligt. (9)

5. Bestäm den bästa approximationen  $B(x)$  av funktionen

$$f(x) = |x|, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

med polynom av grad högst 3, mätt med normen i rummet  $L^2[-1, 1]$ . Beräkna också  $\|f - B\|$ , där normen tas i samma  $L^2$ -rum. (6+2)

6. Lös Dirichlets problem  $\Delta u = 0$  i cylindern

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1, 0 < z < L\}$$

med randvärden  $u(x, y, 0) = u(x, y, L) = 0$  för  $x^2 + y^2 < 1$  och  $u(x, y, z) = 1$  för  $x^2 + y^2 = 1, 0 < z < L$ . (8)

7. Formulera och bevisa satsen om punktvis derivering av Fourierserier. Det räcker att betrakta komplexa Fourierserier i intervallet  $[-\pi, \pi]$ . (6)
8. Beskriv superpositionsmetoden för att lösa PDE-problem med givna randvillkor och ev. initialvillkor. (6)