MATEMATISKA VETENSKAPER Datum: 2014-03-14
Chalmers

LÖSNINGAR TILL tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2 och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Uppgift 1.
Vi söker i intervallet en utveckling av typ

$$x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell},$$

och koefficienterna ges enligt formeln av

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x^2 \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx.$$

Här partialintegrerar vi två gånger och får

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{2}{\pi n} \left[x^2 \cos \frac{n\pi x}{\ell} \right]_0^{\ell} + \frac{4}{\pi n} \int_0^{\ell} x \cos \frac{n\pi x}{\ell}\, dx \\ &= (-1)^{n+1} \frac{2\ell^2}{\pi n} + \frac{4\ell}{\pi^2 n^2} \left[x \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right]_0^{\ell} - \frac{4\ell}{\pi^2 n^2} \int_0^{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx \\ &= (-1)^{n+1} \frac{2\ell^2}{\pi n} + 0 + ((-1)^n - 1) \frac{4\ell^2}{\pi^3 n^3}, \qquad n = 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$

Detta kan också uttryckas med en formel för jämna n-värden,

$$b_{2k} = -\frac{\ell^2}{\pi k}$$

och en för udda n-värden,

$$b_{2k-1} = \frac{2\ell^2}{\pi(2k-1)} - \frac{8\ell^2}{\pi^3 (2k-1)^3}.$$

Båda formlerna gäller för $k = 1, 2, \ldots$. Därmed har vi funnit den sökta serien.

För konvergensen observerar vi att den funna sinusserien är Fourierserien för den udda, 2ℓ-periodiska utvidgningen av f till hela $\mathbb{R}$, och denna funktion är styckvis glatt i hela $\mathbb{R}$ (rita grafen). Konvergenssatsen säger därför att Fourierserien konvergerar mot den utvidgade funktionen i varje punkt där den är kontinuerlig. Speciellt gäller det alla punkter i det öppna intervallet $0 < x < \ell$. För ändpunkterna 0 och ℓ kan man helt enkelt titta på serien och se att alla termerna är 0, så den konvergerar mot 0. Detta följer också av konvergenssatsen, eftersom den säger att man där har konvergens mot medelvärdet av vänster- och högergränsvärdena för den utvidgade funktionen. Man ser (med hjälp av grafen) att dessa medelvärden är 0. Detta besvarar frågan om konvergens.

Anm. Som alternativ för att finna Fourierserien kan man observera att funktionen x^2 har derivatan $2x$ i intervallet $(0, \ell)$ och försöka med att integrera en Fourierserie för derivatan. För att få en sinusserie för x^2 behövs då en cosinusserie för $2x$. Det innebär en jämn utvidgning av $2x$ till $(-\ell, \ell)$, alltså $2|x|$. Lägg märke till att $2|x|$ är derivatan av den udda utvidgningen $x^2 \operatorname{sgn} x$ av x^2 i $(-\ell, \ell)$. Enligt BETA 13.1 (3), eller hellre "Några tips...", är

$$2|x| = \ell - \frac{8\ell}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{\ell}, \qquad -\ell < x < \ell.$$

Här flyttar vi över termen ℓ till vänsterledet, för att få en Fourierserieutveckling utan konstant term, av en funktion som därför har medelvärde 0 över en period. Därefter kan man använda satsen om termvis integration av en Fourierserie. En primitiv funktion av vänsterledet ges i $(-\ell, \ell)$ av $x^2 \operatorname{sgn} x + \ell x$. Då säger satsen att

$$x^2 \operatorname{sgn} x + \ell x = A_0 - \frac{8\ell^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{\ell}$$

för någon konstant A_0. I detta fall måste vara 0, eftersom vänsterledet är udda. Här känner vi igen termerna med $(2k-1)^2$ i resultatet ovan. De övriga termerna får man genom att utveckla ℓx i sinusserie enligt BETA 13.1 (12), och resultatet blir samma serie som förut.

För denna uppgift är det alltså knappast enklare att använda tabell och termvis integration. Men det kanske kan göra det lättare att förstå varför koefficienterna har både termer som avtar som $1/n$ och som $1/n^3$.

Uppgift 2.
Differentialekvationen är här den vanliga, homogena värmeledningsekvationen. Randvärdena är inhomogena, på ett sätt som är oberoende av t-variabeln. Därför fungerar steady state-metoden.

Vi börjar alltså med att finna en funktion $u_0(x)$ av enbart x-variabeln som uppfyller värmeledningsekvationen och randvillkoren. Det ger $u_0''(x) = 0$ så att u_0 är av formen $u_0(x) = ax + b$, och dessutom skall man ha $u_0'(0) = 2$ och $u_0(\ell) = 1$. Det ger $a = 2$ och $b = 1 - 2\ell$, och alltså $u_0(x) = 2x + 1 - 2\ell$.

Sedan söker vi en lösning $u(x, t)$ till det givna problemet av formen $u(x, t) = u_0(x) + v(x, t)$. För v får vi då $v_t = kv_{xx}$ och homogena randvillkor $v_x(0, t) = 0$ och $v(\ell, t) = 0$, samt initialvillkor $v(x, 0) = 2(x - \ell) - u_0(x) = -1$. Därför kan v bestämmas med variabelseparation.

För en separerad lösning $v = X(x)T(t)$ får man som vanligt

$$\frac{1}{k}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda,$$

för någon konstant λ, och $X'(0) = X(\ell) = 0$.

I fallet $\lambda > 0$, säg $\lambda = \mu^2$ där $\mu > 0$, leder detta till $X(x) = a \cosh \mu x + b \sinh \mu x$. Randvillkoren medför $b = 0$ och $a = 0$, så man får bara nollösningen.

För $\lambda = 0$ får man $X(x) = ax + b$, och inte heller i det fallet finns det några lösningar $X(x)$ utöver nollösningen.

Om $\lambda < 0$, säg $\lambda = -\nu^2$ med $\nu > 0$, har man $X(x) = a \cos \nu x + b \sin \nu x$. Randvillkoren ger då att $b = 0$ och $\cos \nu\ell = 0$, så att $\nu = (n - 1/2)\pi/\ell$ för något $n = 1, 2, \ldots$.

Motsvarande funktion $T(t)$ är proportionell mot

$$e^{-k(\frac{(n-1/2)\pi}{\ell})^2 t}.$$

För v ansätter vi nu en summa av separarade lösningar

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{(n-1/2)\pi x}{\ell}\, e^{-k(\frac{(n-1/2)\pi}{\ell})^2 t}.$$

Initialvillkoret säger då att

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{(n-1/2)\pi x}{\ell} = -1, \qquad 0 < x < \ell.$$

Dessa cosinusfunktioner bildar ett fullständigt ortogonalsystem i $L^2[0,\ell]$, eftersom de utgör egenvektorerna till ett reguljärt Sturm-Liouville-problem. Deras normer i detta L^2-rum ges av

$$\left\|\cos\frac{(n-1/2)\pi x}{\ell}\right\|^2 = \int_0^\ell \cos^2\frac{(n-1/2)\pi x}{\ell}\, dx = \frac{\ell}{2},$$

det sista via "dubbla vinkeln". Därför ges koefficienterna av

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\ell}\int_0^\ell (-1)\cos\frac{(n-1/2)\pi x}{\ell}\, dx \\ &= -\frac{2}{(n-1/2)\pi}\sin{(n-1/2)\pi} = \frac{4(-1)^n}{(2n-1)\pi}. \end{aligned}$$

Detta bestämmer v, och slutresultatet blir att u ges av

$$u(x,t) = 2x + 1 - 2\ell + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{(n-1/2)\pi x}{\ell}\, e^{-k(\frac{(n-1/2)\pi}{\ell})^2 t},$$

där a_n är som angetts ovan.

Uppgift 3.
Vi söker först negativa egenvärden, och sätter $\lambda = -\mu^2$ där $\mu > 0$. Då är $y(x) = a\cosh\mu x + b\sinh\mu x$ och därmed $y'(x) = a\mu\sinh\mu x + b\mu\cosh\mu x$. Det första randvillkoret medför då $b\mu - a = 0$, så att $y(x) = b(\mu\cosh\mu x + \sinh\mu x)$,

och här kan vi kasta faktorn b. Insatt i det andra randvillkoret ger detta att $\mu \cosh 3\mu + \sinh 3\mu = 0$, dvs. vi får ekvationen $\tanh 3\mu = -\mu$. Men tanh-funktionen är positiv på positiva halvaxeln, så denna ekvation har ingen lösning $\mu > 0$. Därför finns det inga negativa egenvärden.

Fallet $\lambda = 0$ ger $y(x) = ax + b$, och randvillkoren medför $a - b = 0$ och $3a + b = 0$. Detta ekvationssystem löses bara av $a = b = 0$, och därför är 0 inte ett egenvärde.

Det återstår att sätta $\lambda = \nu^2$ med $\nu > 0$. Då är $y(x) = a \cos \nu x + b \sin \nu x$ och därmed $y'(x) = -a\nu \sin \nu x + b\nu \cos \nu x$. Det första randvillkoret ger $b\nu - a = 0$, så att $y(x)$ är (proportionell mot) $\nu \cos \nu x + \sin \nu x$. Då medför det andra randvillkoret att $\nu \cos 3\nu + \sin 3\nu = 0$ och $\tan 3\nu = -\nu$. Genom att skissa graferna för båda leden i denna ekvation ser vi att ekvationen har en följd av lösningar $\nu_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, som vi numrerar i växande ordning.

Vi vill veta hur många av dem som motsvarar ett egenvärde $\lambda_k = \nu_k^2$ som är mindre än 2. Grafiskt ser man att den första lösningen ν_1 ligger på den gren av kurvan för $\tan 3\nu$ som ges av $\pi/2 < 3\nu < 3\pi/2$, och på den vänstra, undre halvan av denna gren, alltså där $\pi/2 < 3\nu < \pi$. (Rita!) Det följer att $\nu_1 < \pi/3$ och alltså att $\lambda_1 = \nu_1^2 < \pi^2/9 < 2$. Den andra lösningen ν_2 ligger på nästa gren, given av $3\pi/2 < 3\nu < 5\pi/2$. Det ger $\nu_2 > \pi/2$ och därmed $\lambda_2 > \pi^2/4 > 2$.

Detta betyder att λ_1 är det enda egenvärdet mindre än 2, så svaret på uppgiften är: ett.

Anm. I fallet $\lambda > 0$ kan man som alternativ skriva den allmänna lösningen till differentialekvationen som $a \cos \nu(x - 3) + \sin \nu(x - 3)$. Då börjar man med randvillkoret i punkten 3, som genast ger $a = 0$. Med hjälp av randvärdet i 0 kommer man sen fram till samma ekvation $\tan 3\nu = -\nu$ som förut. Motsvarande kan göras också i fallet $\lambda < 0$.

Uppgift 4.

Vi Fouriertransformerar i x-variabeln, och söker funktionen

$\hat{u}(\xi,t)$. Den transformerade ekvationen blir

$$\hat{u}_t(\xi,t) = -k\xi^2\hat{u}(\xi,t) - ib\xi\hat{u}(\xi,t).$$

För fixt ξ är dess lösningar

$$\hat{u}(\xi,t) = Ae^{(-k\xi^2 - ib\xi)t},$$

där "konstanten" A kan bero av ξ och bör skrivas $A(\xi)$. Det transformerade initialvillkoret säger att $\hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi)$ och medför $A(\xi) = \hat{f}(\xi)$, så att

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)e^{(-k\xi^2 - ib\xi)t}.$$

Den sökta lösningen $u(x,t)$ är den inversa Fouriertransformen av högerledet här. För att finna den observerar vi först att effekten av faktorn $e^{-ib\xi t}$ blir en translation på inverssidan. Enligt BETA 13.2 (37) är $e^{-kt\xi^2}$ Fouriertransformen av funktionen

$$K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\, e^{-\frac{x^2}{4kt}}.$$

Därför är $\hat{f}(\xi)e^{-kt\xi^2}$ Fouriertransformen av faltningen av K_t och f. För u får vi resultatet

$$u(x,t) = f * K_t(x - bt)$$

eller utskrivet

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - bt - y)\, e^{-\frac{y^2}{4kt}}\, dy.$$

Anm. Att i stället använda Laplacetransformen i t-variabeln blir betydligt besvärligare, även om det förmodligen är möjligt.

Uppgift 5.
I detta L^2-rum bildar Legendrepolynomen $P_n,\ n = 0, 1, \ldots,$ ett fullständigt ortogonalsystem. Satsen om bästa approximation säger att $B(x)$ är ortogonalprojektionen av funktionen f på det delrum som spänns upp av $P_n,\ n = 0, 1, 2, 3,$

och ges av

$$B(x) = \sum_{n=0}^{3} c_n \, P_n,$$

där

$$c_n = \frac{1}{\|P_n\|^2} \, \langle f, P_n \rangle.$$

Här tas både skalärprodukten och normen i $L^2[-1, 1]$.

Eftersom f är jämn och P_1 och P_3 är udda, blir $c_1 = c_3 = 0$. I BETA 12.2, sidan 263, ser vi att $P_0 = 1$ och $P_2 = (3x^2 - 1)/2$ och att $\|P_n\|^2 = 2/(2n + 1)$. Det ger

$$c_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} |x| \, dx = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$$

och

$$c_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^{1} |x| \frac{3x^2 - 1}{2} \, dx = \frac{5}{2} \int_0^1 x(3x^2 - 1) \, dx = \frac{5}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{8}.$$

Den sökta bästa approximationen är därför

$$B(x) = \frac{1}{2} \, P_0 + \frac{5}{8} \, P_2 = \frac{15}{16} \, x^2 + \frac{3}{16}.$$

För att finna normen av $f - B$ skriver vi $f = f - B + B$ och utnyttjar vi att $f - B$ och B är ortogonala. Pythagoras sats ger därför

$$\|f\|^2 = \|f - B\|^2 + \|B\|^2.$$

Här är

$$\|f\|^2 = \int_{-1}^{1} |x|^2 \, dx = 2 \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{2}{3}$$

och

$$\|B\|^2 = \sum_{n=0}^{3} |c_n|^2 \, \|P_n\|^2 = \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{5^2}{8^2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{21}{32}.$$

Detta ger

$$\|f - B\|^2 = \frac{2}{3} - \frac{21}{32} = \frac{1}{96},$$

och $\|f - B\| = 1/\sqrt{96}$.

Att i stället integrera $|f(x) - B(x)|^2$ ger betydligt längre räkningar.

Anm. En alternativ metod för att beräkna $B(x)$, utan att använda Legendrepolynom, är att ansätta $B(x) = \sum_{n=0}^{3} a_n\, x^n$. Skillnaden $f(x) - \sum_{n=0}^{3} a_n\, x^n$ är då ortogonal mot alla polynom av grad högst 3. Speciellt är den ortogonal mot 1, x, x^2 och x^3, vilket utskrivet ger ett ekvationsssystem. Genom att lösa det finner man koefficienterna a_n. Men sen måste man bestämma normen genom integration av $|f(x) - B(x)|^2$.

Uppgift 6.
Vi använder cylindriska koordinater (r, θ, z). Observera att alla de givna randvillkoren är oberoende av θ, så detsamma kommer att gälla för lösningen. Vi skriver alltså $u = u(r, z)$. Eftersom randvillkoren för $z = 0$ och $z = L$ är homogena, kan vi separera det två variablerna. För en separerad lösning $R(r)Z(z)$ till ekvationen $\Delta u = 0$ får vi, via uttrycket för Laplaceoperatorn i plana polära koordinater,

$$\frac{R'' + r^{-1}R'}{R} = -\frac{Z''}{Z},$$

och detta måste ha ett konstant värde, säg λ.

Nu är det viktigt att observera att det är i z-variabeln som man har homogena randvillkor (alltså för $z = 0$ och $z = L$). De måste då gälla även för Z-faktorn i varje separerad lösning, så att $Z(0) = Z(L) = 0$. Vi börjar därför med Z-faktorn, och för den har vi ekvationen $Z'' = -\lambda Z$ med dessa randvillkor. Det är en standardsituation, där vi vet att $Z(z)$ är (proportonell mot) $\sin \frac{n\pi}{L} z$ och $\lambda = (\frac{n\pi}{L})^2$, för något $n \in \{1, 2, \dots\}$.

(Att i stället börja med R-faktorn leder helt fel, eftersom randvillkoret för $r = 1$ inte är homogent.)

Med det λ-värdet blir ekvationen för R

$$r^2 R'' + rR' - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 r^2 R = 0.$$

Detta är den modifierade Besselekvationen, med parametrar $\mu = n\pi/L$ och $\nu = 0$. Lösningarna är linjärkombinationer av de modifierade Besselfunktionerna $I_0(\frac{n\pi}{L}r)$ och $K_0(\frac{n\pi}{L}r)$, och K_0 måste förkastas eftersom den är singulär i 0. Vi får $R(r) = I_0(\frac{n\pi}{L}r)$.

För u ansätter vi nu

$$u(r,z) = \sum_1^{\infty} c_n I_0(\frac{n\pi}{L}r)\sin\frac{n\pi}{L}z.$$

Randvärdet 1 för $r = 1$ medför

$$\sum_1^{\infty} c_n I_0(\frac{n\pi}{L})\sin\frac{n\pi}{L}z = 1,$$

för $0 < z < L$. Vi behöver alltså utveckla funktionen 1 i sinusserie i intervallet $[0, L]$. Det innebär en (underförstådd) udda utvidgning, alltså funktionen $\operatorname{sgn} x$ i $[-L, L]$. Dess utveckling hittar man enklast i "Några tips ...", men också i BETA 13.1 (25) eller (2) med $\alpha = 1$:

$$\operatorname{sgn} x = \frac{4}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\frac{(2k-1)\pi}{L}z.$$

Det följer att $c_n = 0$ för jämna n och att $c_n = \frac{4}{\pi n}\frac{1}{I_0(n\pi/L)}$ för udda n. Sammanfattningsvis kan svaret på uppgiften skrivas

$$u(r,z) =$$

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)I_0((2k-1)\pi/L)}\, I_0\left(\frac{(2k-1)\pi}{L}r\right)\sin\frac{(2k-1)\pi}{L}z.$$