MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Datum: 2014-08-28
Skrivtid: 8.30 - 13.30
Telefon: Magnus Önnheim 0703-088304

**Tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2
och Fouriermetoder MVE290 för TM2**

Hjälpmedel: Godkänd räknedosa, BETA samt "Några tips om Fourierserier m.m. i BETA, 2014" (två sidor).
Maxpoäng står inom parentes efter varje uppgift, med summa 51.
Betygsgränser: betyg 3: 25, betyg 4: 33, betyg 5: 41.

1. Lös problemet

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2, & 0 < x < \ell,\ t > 0 \\ u(0,t) = -2, \quad u(\ell,t) = 2, & t > 0 \\ u(x,0) = x^2 + 2, & 0 < x < \ell. \end{cases}$$

(8)

2. Ett linjärt, tidsoberoende dynamiskt system har systemfunktionen

$$S(\omega) = \frac{1 - e^{i\omega}}{\omega}.$$

Vad blir systemets svar på insignalen $\frac{1}{1+t^2}$? (8)

3. Finn en lösning till problemet

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + x + t, & x > 0,\ t > 0 \\ u(0,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}, & t > 0 \\ u(x,0) = 0,\ \ u_t(x,0) = 0, & x > 0, \end{cases}$$

där $c > 0$ är en konstant. (8)

4. Funktionen $f(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R}$, har en utveckling i Hermitepolynom $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x)$. Bestäm koefficienterna c_0, c_1, c_2, c_3. (8)

5. Ett svängande, cirkulärt membran med radie R_0 beskrivs av en funktion $u(x, y, t)$ som satisfierar vågekvationen $u_{tt} = c^2\Delta u$. Här är $c > 0$ en konstant. Membranets periferi är fixerad, så att $u(x, y, t) = 0$ för $x^2 + y^2 = R_0^2$ och alla $t \geq 0$. I startögonblicket $t = 0$ är $u = 0$ och $u_t = xy$. Bestäm u. Svaret får innehålla svårberäknade integraler. (9)

6. Anta att en funktion är 2π-periodisk och styckvis glatt. Formulera en sats som anger var dess Fourierserie konvergerar och vad seriens summa då är. Bevisa satsen för en kontinuitetspunkt. (2+3)

7. Låt $w(x) = x$ i intervallet $(0, 1)$. Ge exempel på ett fullständigt och ett ofullständigt ortogonalsystem i det viktade rummet $L^2_w(0, 1)$. Båda skall bestå av oändligt många funktioner. (2+3)