MATEMATISKA VETENSKAPER Datum: 2014-08-28
Chalmers

LÖSNINGAR TILL tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2 och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Uppgift 1.
Detta är värmeledningsekvationen med en inhomogen term -2. Dessutom är randvillkoren inhomogena eftersom randvärdena är -2 och 2. Men alla dessa värden är oberoende av t. Därför kan man använda steady state-metoden.

Den innebär att man först söker en funktion $u_0(x)$ av bara x, som satisfierar differentialekvationen och de båda randvillkoren. Det betyder att $0 = u_0''(x) - 2$, med ändpunktsvärdena $u_0(0) = -2$ och $u_0(\ell) = 2$. Denna ordinära differentialekvation har lösningar $u_0(x) = x^2 + ax + b$, och ändpunktsvärdena medför $b = -2$ och $a = -\ell + 4/\ell$. Alltså är

$$u_0(x) = x^2 + \left(-\ell + \frac{4}{\ell}\right) x - 2.$$

Nästa steg är att låta u vara av formen

$$u(x,t) = u_0(x) + v(x,t)$$

och bestämma funktionen v. Genom att stoppa in detta uttryck i hela det givna problemet ser man att v då måste lösa problemet

$$\begin{cases} v_t = u_{xx}, & 0 < x < \ell, \ \ t > 0 \\ u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = 0, & t > 0 \\ v(x,0) = \left(\ell - \frac{4}{\ell}\right) x + 4, & 0 < x < \ell. \end{cases}$$

Detta är ett standardproblem, och de separerade lösningarna är

$$e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Ansatsen blir som vanligt

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{\ell} x,$$

och initialvillkoret ger att

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x = \left(\ell - \frac{4}{\ell}\right) x + 4,$$

för $0 < x < \ell$. Vi skall alltså utveckla högerledet här i sinusserie i intervallet $(0, \ell)$. Det innebär utveckling av dess udda fortsättning till $(-\ell, \ell)$. Den första termen i högerledet är udda, och dess utveckling hittar man i BETA 13.1 (12). Termen $+4$ skall fortsättas med värdet -4 i $(-\ell, 0)$, och man använder enklast utvecklingen av funktionen $\operatorname{sgn} x$ i "Några tips ...". Sammantaget får man

$$\begin{aligned}\left(\ell - \frac{4}{\ell}\right) x + 4 = \frac{2\ell^2 - 8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \\ + \frac{16}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin \frac{(2k-1)\pi}{\ell} x.\end{aligned}$$

Därmed blir svaret på uppgiften

$$\begin{aligned}u(x,t) = x^2 + \left(-\ell + \frac{4}{\ell}\right) x - 2 \\ + \frac{2\ell^2 - 8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \\ + \frac{16}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} e^{-\left(\frac{(2k-1)\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{(2k-1)\pi}{\ell} x.\end{aligned}$$

Om man vill kan man slå ihop de två serierna till en, på följande prydliga sätt:

$$u(x,t) = x^2 + \left(-\ell + \frac{4}{\ell}\right)x - 2$$
$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 + 2\ell^2(-1)^{n+1}}{n}\, e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi}{\ell}x.$$

Detta verifierar man genom att granska koefficienterna för udda och jämna n separat.

Uppgift 2.
Impulssvaret är inversa Fouriertransformen av $S(\omega)$. För att bestämma det skriver vi

$$S(\omega) = e^{i\omega/2}\,\frac{e^{-i\omega/2} - e^{i\omega/2}}{\omega} = -2i\, e^{i\omega/2}\,\frac{\sin\omega/2}{\omega}.$$

Enligt BETA 13.2 F50 är $\frac{\sin\omega/2}{\omega}$ Fouriertransformen av $\frac{1}{2}\chi_{(-1/2,1/2)}$, där χ betecknar karakteristisk funktion. Effekten av faktorn $e^{i\omega/2}$ blir en translation, se BETA 13.2 F7, så att impulssvaret är

$$-i\,\chi_{(-1/2,1/2)}(t+1/2) = -i\,\chi_{(-1,0)}(t).$$

Nu får vi enklast den sökta utsignalen som faltningen av insignalen och impulssvaret, alltså

$$-\,i\int \frac{1}{1+(t-s)^2}\,\chi_{(-1,0)}(s)\,ds = -i\int_{-1}^{0} \frac{1}{1+(t-s)^2}\,ds$$
$$= i(\arctan t - \arctan(t+1)).$$

Anm. Det är naturligt att i stället för ovanstående försöka utnyttja att den sökta utsignalen $y(t)$ har en Fouriertransform som är produkten av insignalens Fouriertransform och systemfunktionen. Det ger

$$\hat{y}(\omega) = \pi e^{-|\omega|}\,\frac{1-e^{i\omega}}{\omega}.$$

Den inversa Fouriertransformationen till detta uttryck hittar man inte i tabellen, men man kan börja med att bestämma derivatan $y'(t)$. Den har Fouriertransformen

$$\widehat{y'}(\omega) = i\omega\hat{y}(\omega) = i\pi e^{-|\omega|}\,(1 - e^{i\omega}),$$

där vi har gjort oss av med nämnaren ω. Eftersom $\pi e^{-|\omega|}$ är Fouriertransformen av $1/(1+t^2)$, får man

$$y'(t) = i\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+(t+1)^2}\right).$$

Detta ger genom integration

$$y(t) = i(\arctan t - \arctan(t+1)) + C,$$

för någon konstant C. För att bestämma C kan man exempelvis tänka på rummet $L^2(\mathbb{R})$. Eftersom $\hat{y}(\omega)$ tillhör $L^2(\mathbb{R})$ enligt uttrycket ovan, gäller enligt Plancherel detsamma för $y(t)$. Men arctan-funktionen har gränsvärdena $\pm\pi/2$ i $\pm\infty$, så vårt uttryck för $y(t)$ har gränsvärdet C i $\pm\infty$. Därför måste $C = 0$, och vi återfinner samma svar på uppgiften som förut.

Uppgift 3.
Området är en kvadrant, och randvillkoren för $t = 0$ är homogena. Detta talar för Laplacetransformen i t-variabeln. Vi sätter alltså $U(x,s) = \mathcal{L}u(x,s)$. Eftersom $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$, blir $\mathcal{L}u_{tt}(x,s) = s^2U(x,s)$, och ekvationen transformeras till

$$s^2U(x,s) = c^2U_{xx}(x,s) + \frac{x}{s} + \frac{1}{s^2},$$

där de sista termerna är Laplacetransformerna av x och t och fås ur BETA 13.5 L20. Randvillkoret för $x = 0$ transformeras enligt BETA 13.5 L57 till

$$U(0,s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

Nu fixerar vi $s > 0$ och får den ordinära differentialekvationen

$$U_{xx}(x,s) - \frac{s^2}{c^2}U(x,s) = -\frac{1}{c^2}\frac{x}{s} - \frac{1}{c^2}\frac{1}{s^2}$$

i x-variabeln. Dess homogenlösningar är

$$U(x,s) = Ae^{\frac{s}{c}x} + Be^{-\frac{s}{c}x},$$

där "konstanterna" A och B kan bero av s, men inte av x. Högerledet i ekvationen är ett förstagradspolynom i x, och för att finna en partikulärlösning kan man ansätta ett annat förstagradspolynom $ax + b$ (det går bra eftersom 0 inte är en nollställe till ekvationens karakteristiska polynom). Man får enkelt att $a = 1/s^3$ och $b = 1/s^4$. Den ordinära differentialekvationen har alltså den allmänna lösningen

$$U(x,s) = Ae^{\frac{s}{c}x} + Be^{-\frac{s}{c}x} + \frac{x}{s^3} + \frac{1}{s^4}.$$

Här observerar vi att den första termen i högerledet har ett alltför snabbt växande i oändligheten, så att den förkastas. Uppgiften är ju bara att finna en lösning till problemet. Vi skriver $B = B(s)$.

Det transformerade randvillkoret för $x = 0$ ger nu

$$B(s) + \frac{1}{s^4} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}.$$

Alltså är

$$U(x,s) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}e^{-\frac{s}{c}x} - \frac{1}{s^4}e^{-\frac{s}{c}x} + \frac{x}{s^3} + \frac{1}{s^4}.$$

För att inverstransformera detta observerar vi först att en faktor e^{-ds} på transformsidan, med $d > 0$, ger en translation på inverssidan, se BETA 13.5 L4. I vårt fall är $d = x/c$, och med tabell får man

$$u(x,t)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{t - x/c}}\theta(t - x/c) - \frac{(t - x/c)^3}{6}\theta(t - x/c) + \frac{xt^2}{2} + \frac{t^3}{6}.$$

Uppgift 4.
Eftersom Hermitepolynomen bildar en ortogonalbas på $\mathbb{R}$ i det viktade rummet $L^2(e^{-x^2})$ och normerna ges av

$$\|H_n\|^2_{e^{-x^2}} = \sqrt{\pi}\, 2^n\, n!$$

har man

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, 2^n\, n!} \int_{-\infty}^{\infty} |x| H_n(x) e^{-x^2}\, dx.$$

Om n är udda, blir denna integral 0 eftersom H_n då också är udda och $|x|$ är en jämn funktion. Enligt tabell är $H_0 = 1$, så att

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2}\, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[-e^{-x^2} \right]_0^{\infty},$$

vilket ger $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. För $n = 2$ får man

$$c_2 = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x| (4x^2 - 2) e^{-x^2}\, dx.$$

Termen -2 här ger ett bidrag till c_2 som är $-1/4$ gånger uttrycket för c_0, alltså $-\frac{1}{4\sqrt{\pi}}$. Det återstår att beräkna

$$\frac{1}{8\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, 4x^2 e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2\, 2x e^{-x^2}\, dx.$$

Där partialintegrerar vi och får

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[-x^2\, e^{-x^2} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-x^2}\, dx.$$

Den första termen här är 0, och den andra har, återigen enligt beräkningen av c_0, värdet $1/(2\sqrt{\pi})$. Detta ger sammanfattningsvis att

$$c_2 = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}.$$

Svaret på uppgiften blir

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \qquad c_1 = 0, \qquad c_2 = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}, \qquad c_3 = 0.$$

Anm. Integralerna $\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$ och $\int_0^\infty x^3e^{-x^2}\,dx$, som vi ju behövde, kan man också hitta i BETA 7.5 (42) sidan 181, tredje raden i högerledet, med $k=0$ resp. $k=1$.

Uppgift 5.
I polära koordinater blir vågekvationen

$$\frac{1}{c^2}u_{tt}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta},$$

där nu $u=u(r,\theta,t)$. Vi söker separerade lösningar $u=R(r)\Theta(\theta)T(t)$ som också uppfyller randvillkoret $u(R_0,\theta,t)=0$. Detta sista medför $R(R_0)=0$. Vågekvationen ger nu på vanligt sätt

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}=\frac{R''}{R}+\frac{1}{r}\frac{R'}{R}+\frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta},$$

och denna kvantitet måste vara konstant, säg p. Då får man

$$T''(t)=c^2pT(t)$$

och

$$r^2\frac{R''}{R}+r\frac{R'}{R}-pr^2=-\frac{\Theta''}{\Theta},$$

som också måste vara konstant, säg q. Alltså är

$$\Theta''=-q\Theta.$$

Eftersom Θ är 2π-periodisk, vet vi att q måste vara n^2 för något $n=0,1,\dots,$ och att Θ är en linjärkombination av $\cos n\theta$ och $\sin n\theta$. För $R(r)$ får vi då ekvationen

$$r^2R''+rR'+(-pr^2-n^2)R=0,$$

som vi känner igen som Bessels (modifierade) ekvation.

Fallet $p>0$, säg att $p=\mu^2$ med $\mu>0$, ger den modifierade ekvationen, med lösningar som är linjärkombinationer av $I_n(\mu r)$ och $K_n(\mu r)$. Men K_n har en singularitet vid 0 och måste uteslutas, och I_n saknar nollställen i $\mathbb{R}_+$ och kommer inte heller i fråga, på grund av randvillkoret i R_0.

Om $p=0$ har vi en välkänd Eulerekvation, med linjärt oberoende lösningar $r^{\pm n}$ för $n>0$ resp. 1 och $\ln r$ för $n=$

0. Precis som nyss utesluter vi här först r^{-n} och $\ln r$ och därefter den återstående lösningen.

Bara fallet $p < 0$ är kvar, och vi skriver $p = -\mu^2$ med $\mu > 0$ och får Bessels ekvation. Lösningarna är linjärkombinationer av $J_n(\mu r)$ och $Y_n(\mu r)$, men Y_n bortfaller på grund av sin singularitet i 0. Lösningen $R(r)$ är alltså proportionell mot $J_n(\mu r)$, och randvillkoret i R_0 medför att μR_0 måste vara ett av nollställena $\lambda_{kn},\ k = 1, 2, \ldots,$ för J_n i $\mathbb{R}_+$. Det betyder att $p = -\mu^2 = -\lambda_{kn}^2/R_0^2$.

För $T(t)$ får vi enligt ovan då ekvationen

$$T''(t) = -\frac{c^2\lambda_{kn}^2}{R_0^2}\,T(t).$$

Dess lösningar är linjärkombinationer av $\cos\frac{c\lambda_{kn}}{R_0}t$ och $\sin\frac{c\lambda_{kn}}{R_0}t$. Från initialvillkoret $u(x, y, 0) = 0$ ser vi att man måste ha $T(0) = 0$, och det utesluter cosinusfunktionen här.

Allt detta ger att de separerade lösningarna vi söker är av formen

$$J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{R_0}\,r\right)(a_{nk}\cos n\theta + b_{nk}\sin n\theta)\,\sin\frac{c\lambda_{kn}}{R_0}t,$$

för $n = 0, 1, \ldots$ och $k = 1, 2, \ldots$.(För $n = 0$ bortfaller förstås $\sin n\theta$.) Vi ansätter som lösning till hela problemt en summa av dessa,

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{R_0}\,r\right)(a_{nk}\cos n\theta + b_{nk}\sin n\theta)\,\sin\frac{c\lambda_{kn}}{R_0}t.$$

Det återstår att välja koefficienterna så att även initialvillkoret för u_t uppfylls. Eftersom $xy = r^2\cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}r^2\sin 2\theta$ betyder det att

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c\lambda_{kn}}{R_0}\,J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{R_0}\,r\right)(a_{nk}\cos n\theta + b_{nk}\sin n\theta) = \frac{1}{2}r^2\sin 2\theta.$$

Till vänster har vi en Fourierserie i θ-variabeln, vilket blir tydligare om vi skriver vänsterledet så här:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c\lambda_{kn}}{R_0}\,J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{R_0}\,r\right)a_{nk}\right)\cos n\theta \\ +\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c\lambda_{kn}}{R_0}\,J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{R_0}\,r\right)b_{nk}\right)\sin n\theta=\frac{1}{2}r^2\sin 2\theta.$$

Högerledet är proportionellt mot en av Fourierseriens sinustermer. Det medför att Fourierserien i själva verket måste bestå av bara denna $\sin 2\theta$-term. Alltså är alla $a_{nk}=0$, och $b_{nk}=0$ så snart $n\neq 2$. Kvar blir relationen

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c\lambda_{k2}}{R_0}\,J_2\left(\frac{\lambda_{k2}}{R_0}\,r\right)b_{2k}=\frac{1}{2}r^2,$$

som skall gälla för $0<r<R_0$. Detta är en utveckling i Besselfunktioner, och man vet att funktionerna $J_2\left(\frac{\lambda_{k2}}{R_0}r\right)$ bildar ett fullständigt ortogonalsystem i det viktade rummet $L^2_r(0,R_0)$. Se BETA 12.4, sid 275, där man även hittar dessa funktioners normer. Den vanliga formeln för koefficienterna i en ortogonalutveckling ger

$$b_{2k}=\frac{1}{c\lambda_{k2}R_0J_3(\lambda_{k2})^2}\int_0^{R_0}J_2\left(\frac{\lambda_{k2}}{R_0}\,r\right)r^3\,dr.$$

Med dessa b_{2k} är svaret på uppgiften

$$u(r,\theta,t)=\sum_{k=1}^{\infty}b_{2k}\,J_2\left(\frac{\lambda_{k2}}{R_0}\,r\right)\sin 2\theta\,\sin\frac{c\lambda_{k2}}{R_0}t.$$

Slutligen är det värt att påpeka att integralerna i ovanstående uttryck för b_{2k} låter sig beräknas. Efter variabeltransformationen $s=\lambda_{k2}\,r/R_0$ kan man använda BETA 12.4, sjätte formeln i rutan på sidan 274, med $C_n=J_2$. Då får man ett enklare uttryck:

$$b_{2k}=\frac{R_0^3}{c\lambda_{k2}^2\,J_2(\lambda_{k2})}.$$

Uppgift 7.
Denna teoriuppgift är värd en kommentar.

Vikten $w(x) = x$ leder tankarna till Besselfunktioner. Med ett fixt $n \geq 0$ och något $a > 0$ vet man att funktionerna $\phi_k(r) = J_n(\lambda_k\, r/a)$, där $k = 1, 2, \ldots$ och λ_k är nollställena till J_n på positiva halvaxeln, bildar ett fullständigt ortogonalsystem i intervallet $(0, a)$, med denna vikt. Det är alltså bara att välja $a = 1$ för att få det sökta fullständiga ortogonalsystemet.

För att finna ett ofullständigt sådant system räcker det att ta bort en av funktionerna i det fullständiga systemet, till exempel den första ϕ_1. Då är ju funktionen ϕ_1 ortogonal mot alla de återstående men ändå inte nollfunktionen. Enligt en sats om fullständighet medför det att systemet inte är fullständigt.