MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen i Fourieranalys/Fouriermetoder, MVE030/MVE290, 25/08/2015, 8.30-13.30
Hjälpmedel: Godkänd räknedosa, BETA.
Telefonvakt: Tim Cardelin, 0703-088304.

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS:	Ange linje samt personnummer och namn på omslaget. Ange kod på *varje* inlämnat blad. Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt. För betyg 3 krävs 30p, för betyg 4 krävs 40p, och för betyg 5 krävs 50p av 60p möjliga plus ev. bonus

1. Funktion f är definierad på intervall $-\pi < t < \pi$ som $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}2(\frac{\pi^2}{n} - \frac{6}{n^3})$.

   (a) Hitta uttryck för f i elementära funktioner. (4p)

   (b) Argumentera för seriens konvergens för varje t i intervallet. (2p)

   Lösningsförslag: Formel (14) för $L = \pi$ ger $t^3 \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\pi^2}{n}(1 - \frac{6}{n^2\pi^2})$ när $-\pi < t < \pi$. Om vi fortsätter funktionen 2π-periodisk (man ska definiera den i $t = (2k+1)\pi$ där kan man t.ex. definiera den som $f((2k+1)\pi) = 0$), så ser man att den är styckvisst glatt. Satsen om konvergens av Fourierserier ger då att den konvergerar i varje punkt. Då funktionen är kontinuerlig i alla punkter av $(-\pi, \pi)$, konvergerar serien till t^3.

2. (a) Hitta Fouriertransformerna till funktioner xe^{-x^2} och $x^2e^{-x^2}$. (4p)

   (b) Använd svaret i (a) för att hitta Fouriertransformen, samt utryck i elementära funktioner för funktionen $f(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(y-x)e^{-x^2-(y-x)^2}dx$. (4p)

   (c) Hitta $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-2x^2}dx$. (1p)

   Lösningsförslag: Ur Beta (F28): $\mathcal{F}(\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}) = e^{-\frac{1}{4}\xi^2}$. Efter F11, $\mathcal{F}(\frac{-ix}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}) = \frac{d}{d\xi}e^{-\frac{1}{4}\xi^2} = -\frac{1}{2}\xi e^{-\frac{1}{4}\xi^2}$, i.e. $\mathcal{F}(xe^{-x^2}) = -i\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\xi e^{-\frac{1}{4}\xi^2}$. På samma sätt $\mathcal{F}(x^2e^{-x^2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}(1 - \frac{1}{2}\xi^2)e^{-\frac{1}{4}\xi^2}$.

   Ur Beta (F12) $f(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(y-x)e^{-x^2-(y-x)^2}dx = g * g(y)$ där $g(x) = xe^{-x^2}$. Så $\mathcal{F}(f) = (-i\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\xi e^{-\frac{1}{4}\xi^2})\cdot(-i\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\xi e^{-\frac{1}{4}\xi^2}) = -\frac{1}{4}\pi\xi^2 e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$. Ur (F9), $2\pi(f(-x)) = \mathcal{F}(-\frac{1}{4}\pi\xi^2e^{-\frac{1}{2}\xi^2})$, så av (F5) $f(x) = \mathcal{F}(-\frac{1}{8}\xi^2e^{-\frac{1}{2}\xi^2}) = -\frac{1}{4}\mathcal{F}(\frac{1}{2}\xi^2e^{-\frac{1}{2}\xi^2})$. Ur (F4) med $a = 1/\sqrt{2}$, har man $f(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}(1-x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2} = -\frac{1}{8}\sqrt{2\pi}(1-x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Observera att $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2x^2} dx = -f(0) = \frac{\sqrt{2\pi}}{8}$. Observera att ma kunde också hitta integralen som 7.5.42. Då det var inte sagt hur man ska räkna ut den, ger denna lösning också 1p.

3. Lös följande begynelsevärdet problem på positiva halv-axeln med hjälp av Laplace transform: $u'' + 4u = \sin t; u(0) = 0; u'(0) = 2$. (8p)

   Lösningsförslag: Gör Laplace transform av ekvationen: $s^2U(s) - 2 + 4U(s) = \frac{1}{s^2+1}$. Räcknar ut $(s^2+4)U(s) = 2 + \frac{1}{s^2+1}$ och $U(s) = \frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{3(s^2+1)} - \frac{1}{3(s^2+4)} = \frac{5}{3(s^2+4)} + \frac{1}{3(s^2+1)}$. Vilken funktion har en sådan Lapalace transform?
   $u(t) = \frac{5}{6}\sin(2t) + \frac{1}{3}\sin(t)$ är svaret.

4. Vibration av en sträng beskrivs med ekvationen $u_{tt} = 4u_{xx}$ för $0 \le x \le 1$, $t \ge 0$, med begynnelse/randvilkor $u(x,0) = x - x^2, u(0,t) = 0, u(1,t) = 0, u_t(x,0) = 0$. Lös ekvationen. (8p)

   Lösningsförslag: Variabelseparation för den homogena ekvationen: $u(x,t) = X(x)T(t)$. Vi får $T''/T = 4X''/X (= 4\lambda)$, då vänster sida beror inte på x och högersidan beror inte på t. Randvilkorna ger $X(0) = X(1) = 0, T'(0) = 0$. Löser först $X''/X = \lambda$, $X(0) = X(1) = 0$.

   Om $\lambda = 0$, $X(x) = ax + b$ och randvilkor ger $a = b = 0$, triviallösning.

   Om $\lambda = \mu^2 > 0$, så $X(x) = C_1e^{\mu x} + C_2e^{-\mu x}$. $X(0) = 0$ medför $C_1 = -C_2$. $X(1) = 0$ medför $C_1(e^{\mu} - e^{-\mu}) = 0$, så $C_1 = C_2 = 0$, endast triviallösning.

   Om $\lambda = -\mu^2 < 0$, så $X(x) = C_1\sin(\mu x) + C_2\cos(\mu x)$. $X(0) = 0$ medför $C_1 = 0$. $X(1) = 0$ medför att enda icke-triviala lösningar är $X(x) = C_2\sin(k\pi x)$, när $\mu = k\pi$.

   Nu löser vi $T'' = -4(k\pi)^2T$, med $T'(0) = 0$. $T(t) = B_1\sin(2k\pi t) + B_2\cos(2k\pi t)$. $T'(0) = 0$ ger $B_1 = 0$.

   Alltså $u(x,t) = \sum\limits_{k=1} a_k\cos(2k\pi t)\sin(k\pi x)$. Det återstår hitta a_k, sådana att $u(x,0) = x - x^2$, dvs. $x - x^2 = \sum\limits_{k=1} a_k\sin(k\pi x)$. $a_k = 2\int_0^1(x - x^2)\sin(k\pi x)dx = 2([-\frac{1}{k\pi}(x - x^2)\cos(k\pi x)]_0^1 + \frac{1}{k\pi}\int_0^1(1-2x)\cos(k\pi x)dx) = \frac{2}{k\pi}([\frac{1}{k\pi}(1-2x)\sin(k\pi x)]_0^1 + \frac{1}{k\pi}\int_0^1 2\sin(k\pi x)dx) = \frac{4}{(k\pi)^2}\frac{1}{k\pi}(1-(-1)^k) = \frac{4}{(k\pi)^3}(1-(-1)^k)$.

   Lösningen blir $u(x,t) = \sum\limits_{k=1} \frac{4}{(k\pi)^3}(1-(-1)^k)\cos(2k\pi t)\sin(k\pi x)$.

5. Lös värmespridningsekvation $u_t = 4\Delta u$ i en isolerade skiva $x^2 + y^2 < 9$. Randvilkorna i polära koordinater blir $u_r(3,\theta,t) = 0$. Begynelsevilkor i polära koordinater är $u(r,\theta,0) = r\cos\theta$. (8p) I polära koordinater blir ekvationen $u_t = 4(u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta}$. Separerar variablerna. $u(r,\theta,t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$. Vi ser att $T'/T = 4(R''/R + R'/(rR) + \Theta''/(r^2\Theta)) = 4\sigma$, då ena sida beror inte på t och den andra på r och θ.

   Betrakta först $r^2R''/R + rR'/R - \sigma r^2 = -\Theta''/\Theta = \lambda$ (då vänster sida beror inte på θ och höger sida beror inte på r.

   Θ är 2π periodisk, samt $-\Theta''/\Theta = \lambda$. Om $\lambda = 0$ måste $\Theta = a\theta + b$: ger $\Theta(\theta) = b$ lösning.

   Om $\lambda = -\nu^2 < 0$, $\Theta = C_1e^{\nu\theta} + C_2e^{-\nu\theta}$: ger bara triviala 2π-periodiska lösningar.

Om $\lambda = 0$ $Theta(\theta) = konst$ är de enda periodiska lösningar.

Om $\lambda = \nu^2 > 0$, $\Theta(\theta) = C_1 \sin(\nu\theta) + C_2(\nu\theta)$ och lösningar blir 2π-periodiska om och endast om ν är heltal.

Nu löser vi $r^2R'' + rR' - (\sigma r^2 + \nu^2)R = 0$. Om $\sigma > 0$ så är lösningen $R(r) = C_1 I_\nu(\sqrt{\sigma} r) + C_2 K_\nu(\sqrt{\sigma} r)$. K_ν är obegränsad vid noll, så $C_2 = 0$ och I_ν har inga nollställen för derivatan, så $C_1 = 0$ och vi har bara triviall lösning.

Om $\sigma = 0$ och $\nu \neq 0$ så är lösningen $R(r) = C_1 r^\nu + C_2 r^{-\nu}$. $C_2 = 0$ då $r^{-\nu}$ går mot oändlighet vid noll, och r^n saknar nollställen för derivatan alltså är lösningen igen triviall.

Om $\sigma = \nu = 0$ är allmän lösning $R(r) = A + C\ln(r)$. $C0 =$ då $\ln(r)$ går till oändlighet vid noll, men $R(r) = A$ (konstant) är möjliga lösningar.

Om $\sigma = -\mu^2 < 0$, så är lösningen $R(r) = CJ_\nu(\mu r) + DY_\nu(\mu r)$. Y_ν går till oändlighet vid noll, så $D = 0$. Om $R(r) = CJ_\nu(\mu r)$ så randvilkor $R'(\mu 3) = 0$ ger att $R(r) = J_\nu(\mu_{\nu,k} r/3)$ där $\mu_{\nu,k}$ är nollställen till derivatan av J_ν. ($\mu = \mu_{\nu,k}/3$.

Det återstår att lösa $T'(t) = -\frac{4}{9}\mu_{\nu,k}^2$ och $T'(t) = 0$. Lösningen är $T(t) = Ce^{-\frac{4}{9}\mu\nu,k^2}$ och $T(t) = konst$.

När vi samlar alla ikke-trivialla lösningar i linjär kombination, får vi

$u(r,\theta,t) = C + \sum_{k,n=1}^{\infty} J_n(\mu_{n,k} r/3)(A_{n,k}\sin(n\theta) + B_{n,k}\cos(n\theta)e^{-\frac{4}{9}\mu_{n,k}^2 t}$.

Vi hittar koefficienterna genom begynelsevilkor.

$u(r,\theta,0) = r\cos(\theta) = C + \sum_{k=1,n=0}^{\infty} J_n(\mu_{n,k} r/3)(A_{n,k}\sin(n\theta) + B_{n,k}\cos(n\theta)$. Då presentationen som Fourierserien är entydlig, ser vi att alla koefficienterna utom $B_{1,k}$ måste vara noll.

Samt $r = \sum_{k=1}^{\infty} B_{1,k} J_1(\mu_{n,k} r/3)$.

För att hitta koefficienter inser vi att $J_1(\mu_{n,k} r/3)$ utgör en ortogonal bas för funktioner på $[0,3]$ med vikten r (då de är system av lösningar av Sturm-Liouville problem).

$B_{1,k} = \int_0^3 r^2 J_1(\mu_{1,k} r/3)dr / \int_0^3 J_1(\mu_{1,k} r/3)^2 r dr$.

$\int_0^3 J_1(\mu_{1,k} r/3)^2 r dr = \frac{9}{2} J_1'(\mu_{1,k})^2 + \frac{\mu_{1,k}^2 - 1}{2\mu_{1,k}^2/9} J_1(\mu_{1,k})^2 = \frac{9}{2}\frac{\mu_{1,k}^2-1}{\mu_{1,k}^2} J_1(\mu_{1,k})^2$, då $J_1'(\mu_{1,k}) = 0$.

$\int_0^3 r^2 J_1(\mu_{1,k} r/3)dr = \frac{27}{\mu_{1,k}^3}\int_0^{\mu_{1,k}} x^2 J_1(x)dx = \frac{27}{\mu_{1,k}^3}[x^2 J_2(x)]_0^{\mu_{1,k}} = \frac{27}{\mu_{1,k}} J_2(\mu_{1,k})$.

Alltså $u(r,\theta,t) = \sum_{k=1}^{\infty} 6\frac{\mu_{1,k}}{(\mu_{1,k}^2-1)J_1(\mu_{1,k})} J_2(\mu_{1,k}) J_1(\mu_{1,k} r/3)\cos(\theta) e^{-\frac{4}{9}\mu_{1,k}^2 t}$ är svaret.

6. Hitta det polynom P av grad högst 2 som minimerar $\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-x^2} - P(x))^2 e^{-x^2} dx$. Motivera ditt svar. (6p)

Vi kan presentera P som linjärt kombination av första tre Hermit polynomer. Då Hermit polynomer utgör en ortogonal bas med vikten e^{-x^2} blir integralen minst då den kombination är första tre term i utveckling av e^{-x^2}. Alltså $P(x) = H_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2}dx/\sqrt{\pi} + H_1(x)\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-2x^2}dx/(2\sqrt{\pi}) + H_2(x)\int_{-\infty}^{\infty}(4x^2-2)e^{-2x^2}dx/(8\sqrt{\pi}) = \sqrt{\pi/2}/\sqrt{\pi} + 0 + (4x^2-2)(4\sqrt{2\pi}/8 - 2\sqrt{\pi/2})/(8\sqrt{\pi}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - (2x^2-1)\sqrt{2}/8 = \frac{5}{8}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}x^2$.

7. Formulera och bevisa satsen om approximativ etta. (8p)

8. Formulera och bevisa invers formel för diskret Fouriertransform i speciel fall då man har 8 sämplingpunkter ($N = 8$). Obs! Definition för diskret Fouriertransform är lite olika i Folland ock Beta - du kan ta vilken du vill men skriv tydlig vilken du använder. Beviset måste stämma med definitionen som du använder. (7p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! Maria

Extra formler:

$$\frac{d}{dx}\big(x^{-\nu}J_\nu(x)\big) = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\big(x^{\nu}J_\nu(x)\big) = x^{\nu}J_{\nu-1}(x)$$

$$\int_0^b J_\nu(\mu x)^2 x dx = \frac{b^2}{2}J'_\nu(\mu b)^2 + \frac{\mu^2 b^2 - \nu^2}{2\mu^2}J_\nu(\mu b)^2, \mu, b > 0, \nu \geq 0.$$