MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen i Fourieranalys/Fouriermetoder, MVE030/MVE290, 14/04/2015, 8.30-13.30
Hjälpmedel: Godkänd räknedosa, BETA.
Telefonvakt: Anders Martinsson, 0703-088304.

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 30 poäng.

1. Utveckla funktionen f i sinusserie i intervallet $(0,\pi)$, där f ges av att $f(x)=x^2$ för $0<x<\pi/2$ och $f(x)=0$ för $\pi/2\le x<\pi$. Ange också i vilka punkterna på hela reela linjen som denna serie konvergerar och vad dess summan då är. (7p)

   Lösningsförslag: Ur BETA 13.1 Sine and cosine series" $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx)$ där $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$. I detta fall $b_n=\int_0^{\pi/2} x^2\sin(nx)dx$. *(Det var mindre forvirring om man ska utvekla* x^2 *på mindre interval och då anvñda* $\sin(2nx)$. *Detta reknades som grundlig fel.)*

$$b_n=\int_0^{\pi/2} x^2\sin(nx)dx=\frac{1}{n^3}[2\cos(nx)+2nx\sin(nx)-n^2x^2\cos(nx)]_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{1}{n^3}(2\cos(n\pi/2)-2+2nx\sin(n\pi/2)-n^2x^2\cos(n\pi/2)).$$

   Det var många som tror att t.ex. $\cos(n\pi/2)=0$, *detta stämmer inte för t.ex jämna n.*

   Serien är 2π periodisk och udda (vilket definierar konvergens om vi beskriver den på $[0,\pi]$) och konvergerar på $[0,\pi]$ till $f(x)$ där den är kontinuerlig (dvs. $[0,\pi]\setminus\{\pi/2\}$) och till $\pi^2/8$ i $\pi/2$ (halvsumma till vänster och höger gränsvärdet i $\pi/2$). Detta följer till det att funktionen är styckvis glatt. *(Jag tog en poäng om man glömde linjen utanför* $[0,\pi]$*).*

2. Lös problemett (8p)

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=t\cos 2\pi x, & 0<x<1, t>0;\\ u_x(0,t)=0, u_x(1,t)=0, & t>0;\\ u(x,0)=x, & 0<x<1. \end{cases}$$

   Lösningsförslag: Om vi tittar på

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=0, & 0<x<1, t>0;\\ u_x(0,t)=0, u_x(1,t)=0, & t>0; \end{cases}$$

ser vi att lösningen blir en cosinusserie i x så vi letar efter lösningen av ohomogen problem som $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)\cos(n\pi x)$. Randvillkor $u(x,0) = x$ ska skrivas om också som en cosinus serie: $u(x,0) = x = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)$. Vi bör då lösa diffekvationen $c_n'(t)+n^2\pi^2 c_n(t) = 0, c_n(0) = 2\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}$ för $n \neq 2$ och $c_2'(t)+2^2\pi^2 c_2(t) = t, c_2(0) = 0$. För $n \neq 2$ får vi: $c_n(t) = 2\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}e^{-n^2\pi^2 t}$. För $n = 2$ får vi $c_2(t) = \frac{t}{4\pi^2} - \frac{1}{16\pi^4} + \frac{1}{16\pi^4}e^{-4\pi^2 t}$.
Man kan också lösa problemmet med hjälp av Laplace transform i t, med om man inte delar $u = v + w$ - räkningar blir för kompliserade. Här

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = t\cos 2\pi x, & 0 < x < 1, t > 0; \\ v_x(0,t) = 0, v_x(1,t) = 0, & t > 0; \\ v(x,0) = 0, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

och (löses som vanligt)

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0, & 0 < x < 1, t > 0; \\ w_x(0,t) = 0, w_x(1,t) = 0, & t > 0; \\ w(x,0) = x, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

3. Hitta $\alpha, \beta, \gamma, \nu$ som minimerar $\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-\frac{3}{2}x^2} - \alpha e^{-x^2/2} - \beta x e^{-x^2/2} - \gamma x^2 e^{-x^2/2} - \nu x^3 e^{-x^2/2})^2 dx$.

(8p) Lösningsförslag: $\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-\frac{3}{2}x^2} - \alpha e^{-x^2/2} - \beta x e^{-x^2/2} - \gamma x^2 e^{-x^2/2} - \nu x^3 e^{-x^2/2})^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty}(e^{-x^2} - (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \nu x^3)^2 e^{-x^2} dx$. *(Det verkade vara svårast att komma till den omskrivning rätt, många hade fel av typ $e^{-\frac{3}{2}x^2} = e^3 e^{-x^2/2}$. Detta betraktas inte som ett räknefel.)* Nu ser vi att vi försöker approximera e^{-x^2} med en tredjegrads polynom i L^2-norm med vikt e^{-x^2}. Tredjegrads polynomer är en linjärt hölje av H_0, H_1, H_2, H_3, Hermite's polynomer som är ortonormerade i L^2 med vikt e^{-x^2}. Så $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\nu x^3 = c_0 H_0 + c_1 H_1 + c_2 H_2 + c_3 H_3$, där $c_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)H_n(x)e^{-x^2}dx / \int_{-\infty}^{\infty}(H_n(x))^2 e^{-x^2}dx$ och $f(x) = e^{-x^2}$. Ur BETA 12.2 $\int_{-\infty}^{\infty}(H_n(x))^2 e^{-x^2}dx = n!2^n\sqrt{\pi}$ och $H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2, H_3(x) = 8x^3 - 12x$. Vi se genast att integraler för c_1 och c_3 integrerar udda funktioner över hela linjen och därmed är 0.
$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_0(x)e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (BETA 7.5.41) och $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_2(x)e^{-x^2}dx = 4\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2x^2}dx - 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2}dx = 4\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}} - 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (ur BETA 7.5.41,42).
$c_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}/\sqrt{\pi} = \sqrt{2}/2, c_2 = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}/(8\sqrt{\pi}) = -\sqrt{2}/16, \alpha+\beta x+\gamma x^2+\nu x^3 = \sqrt{2}/2H_0(x) - \sqrt{2}/16H_2(x) = \sqrt{2}/2 - (\sqrt{2}/4x^2 - \sqrt{2}/8) = \sqrt{2}\frac{5}{8} - \sqrt{2}/4x^2$, i.e. $\alpha = \frac{5}{8}\sqrt{2}, \beta = \nu = 0$, $\gamma = -\sqrt{2}/4$. *(Det var en del som krånglade med den allra sist uträkning. I flesta fall räknades detta som slarvfel.)*

4. Lös Dirichlet problem $\Delta u = 0$ i ringen $1 \leq r \leq 2$ med randvärdena i polära koordinater $u_r(r,\theta) = x^2$ för $r = 1$ och $u_r(r,\theta) = 0$ för $r = 2$. (7p)

Lösningsförslag: Låt u är en lösning. Skriv på polära koordinater $u(r,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n(r)\sin(n\theta) + b_n(r)\cos(n\theta)$. Laplace ekvationen blir $\sum_{k=0}^{\infty}((a_n''(r) + a_n'(r)/r - n^2/r^2)\sin(n\theta) + (b_n''(r) + b_n'(r)/r - n^2/r^2)\cos(n\theta))$. Randvilkorna blir $u_r(2,\theta) = 0$, $u_r(1,\theta) = cos^2(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)$. Entydlighet av sin / cos-utveckling leder till diffekvationer som definierar $a_n(r), b_n(r)$. För b_0 har vi $b_0'' + b_0' = 0$, $b_0'(1) = \frac{1}{2}$, $b_0'(2) = 0$. Allmän lösning är $b_0 = C + D\ln(r)$, så $b_0' = D/r$ vilket kan inte vara båda $\frac{1}{2}$ i 1 och 0 i 2. Det betyder att ekvationen saknar lösning.

5. Lös värmelednings ekvation $u_t = 4\Delta u$ i en isolerad halvskiva $x^2 + y^2 \leq 9$, $y \geq 0$. Randvilkor är $u_y(x,0,t) = 0$, och $u_r(x,y,t) = 0$ när $x^2 + y^2 = 9$. Begynelsevilkor är $u(x,y,0) = (x^2 + y^2 - 9)y^2$. (8p)

Lösningsförslag: Byt till polära koordinater och separera variabler:
$\frac{T'}{4T} = \frac{R''}{R} + R'rR + \Theta''r^2\Theta = \lambda$, då VL beror ej på r och θ och HL beror ej på t. Sedan $\frac{r^2R''}{R} + rR'R - \lambda r^2 = -\Theta''\Theta = \tau$ av samma anledning. Vi ska nu lösa: $T'' = 4\lambda T$; $r^2R'' + rR' - \lambda r^2 - \tau = 0, R'(3) = 0$; $\Theta'' + \tau\Theta = 0$, $\Theta'(0) = \Theta'(\pi) = 0$.

För det sista det finns tre fall $\tau < 0$,$\tau = 0$, $\tau > 0$. Det första ger bara triviella lösningar, den andra ger konstanten, den tredje ger $\Theta(\theta) = C\cos(n\theta)$ om $n^2 = \tau$.

För varje $\tau = n^2$ har vi för $r^2R'' + rR' - \lambda r^2 - n^2 = 0, R'(3) = 0$ tre fall: $\lambda > 0, \lambda = 0, \lambda < 0$. I första fallet är lösningen $AI_n(\sqrt{\lambda}r) + BK_n(\sqrt{\lambda}r)$ - K_n är singulär i noll, så $B = 0$. I' har inga röter, så $A = 0$. I den andra fall får vi $Ar^n + Br^{-n}$ om $n \neq 0$, av vilken den andra term är singulär i noll därmed $B = 0$, medan $R'(3) = An3^{n-1} = 0$ medför $A = 0$. Om $n = 0, \lambda = 0$ allmän lösning är $A + B\ln(r)$. Vilkor $R'(3) = B/3 = 0$ medför $B = 0$, men konstanten är en lösning. I den sista fall allmän lösning är $AJ_n(\sqrt{-\lambda}r) + BY_n(\sqrt{-\lambda}r)$. Y_n är singulär i noll, så $B = 0$.

Då vi behöver $R'(3) = 0$, måste $\lambda = -\mu_{k,n}^2/9$, där $\{\mu_{k,n}\}_k$ är mängd av nollstÏllen till J_n'.

Äntligen ur $T' = 4\lambda T$ följer $T(t) = Ce^{\frac{4}{9}\mu_{n,k}^2}$.

Genom att ta linjär kombination av hittade lösningar får vi

$$u(r,\theta,t) = C + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} C_{n,k}J_n(\frac{1}{3}\mu_{n,k}r)\cos(n\theta)e^{-\frac{4}{9}\mu_{k,n}^2}.$$

Begynnelsevilkor ger

$$(r^4 - 9r^2)\sin^2(\theta) = (r^4 - 9r^2)(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta)) = C + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} C_{n,k}J_n(\frac{1}{3}\mu_{n,k}r)\cos(n\theta).$$

Entydlighet av cosinus utvekling ger oss $C_{n,k} = 0$ om $n \neq 0, 2$ och $\frac{1}{2}(r^4 - 9r^2) = C + \sum_{k=1}^{\infty} C_{0,k}J_0(\frac{1}{3}\mu_{0,k}r)$ samt $\frac{1}{2}(r^4 - 9r^2) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{2,k}J_2(\frac{1}{3}\mu_{2,k}r)$. Då $\{1\} \cup \{J_{0,k}(\frac{1}{3}\mu_{0,k}r)\}$ och $\{J_{2,k}(\frac{1}{3}\mu_{2,k}r)\}$ är två ortogonala baser av $L^2([0,3],r)$, man kan hitta koefficienterna $C, C_{0,k}$ och $C_{2,k}$ som $C = \int_0^3 (r^4 - 9r^2)\cdot 1 \cdot rdr / \int_0^3 1^2 rdr$, $C_{0,k} = \int_0^3 (r^4 - 9r^2)J_0(\frac{1}{3}\mu_{0,k}r)rdr / \int_0^3 J_0^2(\frac{1}{3}\mu_{0,k}r)rdr$, och $C_{2,k} = \int_0^3 (r^4 - 9r^2)J_2(\frac{1}{3}\mu_{2,k}r)rdr / \int_0^3 J_2^2(\frac{1}{3}\mu_{2,k}r)rdr$...

6. Sätt

$$f(\xi) = \int_0^1 \sqrt{x} sin(\xi x) dx.$$

Beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

(8p)

Lösningförslag: $e^{ix} = \cos(x) + \sin(x)$, där $\cos(x)$ är jämn och $\sin(x)$ är udda. Så $\int\limits_0^1 \sqrt{x}\sin(\xi x) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{x}\chi_{[0,1]}(x) - \sqrt{-x}\chi_{[-1,0]}(x))e^{i\xi x}dx$. Alltså $f(\xi) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(\sqrt{x}\chi_{[0,1]}(x) - \sqrt{-x}\chi_{[-1,0]}(x))$. Plancherel ger oss

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |\sqrt{x}\chi_{[0,1]}(x) - \sqrt{-x}\chi_{[-1,0]}(x)|^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

Det var svårt för några att få den jämna fortsättningen rätt.

7. Plancherels formel med bevis, för $f, g, \hat{f}, \hat{g} \in L^1$. (8p)

8. Bevisa Wirtinger's olikhet: Om $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är 2π-periodisk, kontinuerlig, har kontinuerlig derivatan och $\int_{-\pi}^{\pi} u(x)dx = 0$, då gäller $\int_{-\pi}^{\pi}(u(x))^2 dx \le \int_{-\pi}^{\pi}(u'(x))^2 dx$, med likheten omm $u(x) = C\cos(x+\alpha)$ för något $C, \alpha \in \mathbb{R}$. (6p)

   Lösningsförslag: Utveckla u och u' i Fourier serie. $c_0 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} u(x)dx = 0$, $c_n' = inc_n$. $\int_{-\pi}^{\pi}(u(x))^2 dx = 2\pi\sum|c_n|^2 \le 2\pi\sum n^2|c_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}(u'(x))^2 dx$. Olikheten är klart då $n^2 \ge 1$. likheten nås om bara termer där $n^2 = 1$ är skilda från noll. I sådant fall $u(x) = c_{-1}e^{-ix} + c_1 e^{ix} = C\cos(x+\alpha)$.

Extra formler:

$$\frac{d}{dx}(x^{-\nu}J_\nu(x)) = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}(x^{\nu}J_\nu(x)) = -x^{\nu}J_{\nu-1}(x)$$

$$\int_0^b J_\nu(\mu x)^2 x dx = \frac{b^2}{2}J_\nu'(\mu b)^2 + \frac{\mu^2 b^2 - \nu^2}{2\mu^2}J_\nu(\mu b)^2,\ \mu, b > 0,\ \nu \ge 0.$$

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! Peter och Maria