

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola

Tentamen i Fourieranalys/Fouriermetoder, MVE030/MVE290, 20/03/2015, 8.30-13.30

Hjälpmedel: Godkänd räknedosor, BETA.

Telefonvakt: Matteo Molteni, 0703-088304.

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För betyg 3 krävs 30p, för betyg 4 krävs 40p, och för betyg 5 krävs 50p av 60p möjliga plus ev. bonus

1. (a) Hitta Fourierserien till en 2π -periodisk funktion som är definierad som $f(x) = 1 - |x|/\pi$ för $x \in [-\pi, \pi)$. (3p)

(b) Använd svaret i förra uppgift för att hitta $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$. (3p)

2. Funktionen $f(x)$ är definierad på \mathbb{R} och har Fouriertransformen som har värdet 1 på intervallen $[-10, -5]$ och $[0, 3]$, värdet -1 på interval $(-5, 0)$ och $(3, 10]$, och värdet 0 på alla resterande tal.

(a) Hitta $f(0)$. (2p)

(b) Hitta $f * f * f * f$. (3p)

(c) Hitta $\int_{-\infty}^{\infty} (f * f * f)^2 dx$. (3p)

3. Lös följande begynnelsevärde problem på positiva halv-axeln med hjälp av Laplace transform: $u'' + 2u' + 2u = H(x - 2\pi)$; $u(0) = 0$; $u'(0) = 1$. (8p)

4. Lös Dirichlet problem $\Delta u = 0$ i kvadraten $0 \leq x, y \leq 1$ med randvärdena (6p)

$$u(x, 0) = x - x^2, u(0, y) = 0, u(1, y) = 0, u(x, 1) = 0.$$

5. (a) Hitta Laguerre polynomen $L_1^{(1)}, L_2^{(1)}, L_3^{(1)}, L_4^{(1)}$. (1p)

(b) Hitta det polynom P av grad högst 3 som minimerar $\int_0^{+\infty} (x^4 - P(x))^2 x e^{-x} dx$.
Motivera ditt svar. (5p)

6. Lös värmeledningsekvation $u_t = 9\Delta u$ i en isolerad skiva $x^2 + y^2 < 4$. Randvilkorna i polära koordinater blir $u_r(2, \theta, t) = 0$. Begynnelsevilkor är $u(x, y, 0) = y^2$. (10p)

7. Visa att bandbegränsat impulssvar kan inte vara kasuellt. (8p)

8. (a) Vad är sfäriska harmoniker och vad är solida harmoniker? (1p)
- (b) Skriv funktionen $f(x, y, z) = x^3$ på sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ som summa av sfäriska harmoniker. Vad blir komponenten av ordning 3. (7p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan kommer att lämnas på kurskanslinsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

Maria

Extra formler:

$$\frac{d}{dx}(x^{-\nu} J_{\nu}(x)) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}(x^{\nu} J_{\nu}(x)) = x^{\nu} J_{\nu-1}(x)$$

$$\int_0^b J_{\nu}(\mu x)^2 x dx = \frac{b^2}{2} J_{\nu}'(\mu b)^2 + \frac{\mu^2 b^2 - \nu^2}{2\mu^2} J_{\nu}(\mu b)^2, \mu, b > 0, \nu \geq 0.$$