MVE290 - Fouriermetoder, TM2 2014/15
Inlämningsuppgifter i distributionsteori

Varje grupp skall göra de fyra förövningarna och en av huvudövningarna. Förövningarna är desamma för alla, utom att q **skall ersättas med den valda huvudövningens nummer**, alltså ett tal mellan 1 och 20. Lösningarna får därför **inte** innehålla symbolen q.

Några upplysningar
I vissa uppgifter används begreppet *karakteristiska funktionen* för en mängd E. Det betyder den funktion χ_E som ges av att $\chi_E(x)$ är 1 om $x \in E$, annars 0. Sålunda är Heavisidefunktionen $H(x)$ den karakteristiska funktionen för positiva halvaxeln.
Vi skriver δ_y för den distribution vars verkan på en godtycklig testfunktion ges av

$$\delta_y[\phi] = \phi(y).$$

Detta uttryck skrivs ofta oegentligt som en integral, men det bör undvikas här. Poängen med distributionerna är ju att man kan ersätta inkorrekta integraluttryck med väldefinierade begrepp och uttryck. I Folland betraktas δ_y som ett translat $\delta(.-y)$ av "Diracfunktionen" (ett bättre namn är Diracdistributionen) $\delta = \delta_0$.

Observera tryckfelen på sidorna 333 och 334 i Follands bok:
alla f i formlerna skall vara F.

Det kanske skall påpekas att en uppgifts svårighetsgrad ofta är en avtagande funktion av problemtextens längd.

Förövningar

(i) Verifiera enligt definitionen att

$$u[\phi] = \sum_{m=0}^{\infty} e^m \phi^{(m)}(q+m)$$

definierar en distribution u på $\mathbb{R}$. Som vanligt betecknar ϕ här en godtycklig testfunktion. Verifiera också att distributionerna u_n, givna av

$$u_n[\phi] = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \phi^{(m)}(q+m+n),$$

konvergerar svagt (dvs. i distributionsmening) mot 0-distributionen då $n \to \infty$.

(ii) Betrakta distributionen

$$u = \frac{1}{\sqrt{x}}\, \chi_{(0,q)} + \sum_{j=1}^{2} \delta_{j+q}.$$

Ange först vad $u[\phi]$ blir, för en testfunktion ϕ. Vad är (distributions)derivatan u' ? Här svarar man lämpligen med ett uttryck som ger u':s verkan på en godtycklig testfunktion. Bestäm också en primitiv distribution till u; observera att detta innebär att finna en distribution och visa att dess derivata är u. Illustrera den primitiva distributionen med en graf.

Ledning för den primitiva distributionen: Ta en term i u i taget, och bestäm en primitiv funktion till den första termen genom integration. För att sen derivera den tilltänkta primitiva distributionen kan man använda antingen definitionen av distributionsderivata eller Theorem 9.1 i Folland, som sammanfaller med Exempel 1 på sidan 5 i texten om distributioner i länken på kurshemsidan. Observera i detta sammanhang att partialintegration är tillåten bara i intervall där funktionerna är kontinuerliga och förekommande derivator existerar.

(iii) Låt u_r vara den distribution i $\mathbb{R}^3$ vars verkan på en testfunktion ϕ är ytintegralen av ϕ över sfären $|x| = r$. Mot vilka distributioner konvergerar $r^{-2}u_{r/q}$ svagt då $r \to 0$ och då $r \to \infty$? Här är förstås testfunktionerna tredimensionella.

(iv) Fouriertransformen av δ är enligt Folland sid 335 $\hat{\delta} = 1$, alltså den konstanta funktionen 1, uppfattad som en distribution. Bestäm Fouriertransformen av δ_q och av funktionen $\sin(x - q)$ genom att använda definitionen av Fouriertransformen för tempererade distributioner, formel (9.28) sid 333 i Folland. Den säger efter korrektion att

$$\hat{u}[\phi] = u[\hat{\phi}],$$

där ϕ är en godtycklig Schwartzfunktion.

Huvudövningar

1. Funktionen $u(x) = \operatorname{sgn} x$, definierad på hela $\mathbb{R}$, ligger varken i L^1 eller L^2, så dess Fouriertransform kan inte definieras med den vanliga integralen. Men eftersom den definierar en tempererad distribution, har den en Fouriertransform $\hat{u}$, som vi vill bestämma.

   (a) Visa att $u_N = u\,\chi_{(-N,N)}$ konvergerar, som tempererade distributioner, mot u då $N \to \infty$. Dra slutsatsen att $\widehat{u_N}$ konvergerar, i samma mening, mot $\hat{u}$.

   (b) Räkna ut $\widehat{u_N}$, och verifiera att den kan skrivas som en konstant gånger

   $$\frac{1}{\xi}\,(1 - \cos N\xi).$$

   För att bestämma $\widehat{u_N}$, eller dess verkan på en Schwartzfunktion ϕ, behöver vi alltså integrera detta uttryck multiplicerat med $\phi(\xi)$. Dela då upp ϕ i en jämn och en udda funktion $\phi_j + \phi_u$; ange uttryck för dessa två funktioner och lägg märke till att båda är Schwartzfunktioner. Observera sen att ϕ_j inte ger något bidrag till integralen. Då återstår

   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_u(\xi)}{\xi}\,(1 - \cos N\xi)\,d\xi.$$

   (c) Bråket här har ingen singularitet i 0, utan är deriverbart även där, eftersom $\phi_u(0) = 0$ och man har följande lemma.

   Lemma Om ψ är en Schwartzfunktion och $\psi(0) = 0$, så är $\psi(x)/x$ också en Schwartzfunktion.

   Visa med hjälp av detta lemma att $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_u(\xi)}{\xi} \cos N\xi\,d\xi \to 0$ då $N \to \infty$, genom att partialintegrera. Då följer det att

   $$\widehat{u_N}[\phi] = \text{konst.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_u(\xi)}{\xi}\,d\xi.$$

Verifiera slutligen, genom att ta med även ϕ_j, att detta betyder att $\widehat{u_N}$ är en konstant gånger distributionen X^{-1}, som även kallas P.V. $1/x$ och är definierad på sidan 324 i Folland. Vad blir konstanten?

(d) Det återstår att bevisa lemmat: Observera först att det bara är ψ:s utseende vid 0 som är problemet. Skriv $\psi(x) = \int_0^x \psi'(t)\,dt$ och byt variabel från t till $s = t/x$ i denna integral. Sen kan man derivera m.a.p. x inne i s-integralen.

2. (a) Visa att distributionerna $u_n = n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}})$ konvergerar svagt mot en distribution u. Beskriv u genom att ange dess verkan på en testfunktion. Kan u (be)skrivas på något enklare sätt?

   (b) Visa att funktionerna $f_n = 2n\chi_{(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})}$ konvergerar svagt mot Diracdistributionen δ_0. Ge en alternativ lösning av (a) genom att verifiera att den svaga konvergensen $f_n \to \delta_0$ består om man deriverar båda leden i distributionsmening.

   (c) Låt ϕ vara en testfunktion. Vad är faltningarna $u_n * \phi$ och $f_n * \phi$, och mot vad konvergerar de då $n \to \infty$?

3. Fourierserien

$$\sum_1^\infty (-1)^n \cos nx$$

   divergerar i vanlig mening. Vi skall se att den konvergerar i distributionsmening, dvs. svagt, och bestämma dess summa.

   (a) Konvergens i L^2 medför svag konvergens. Visa följande något starkare resultat: Anta att f och f_N, $N = 1.2, \ldots$, är 2π-periodiska funktioner, vars restriktioner till intervallet $[-\pi, \pi]$ alla tillhör $L^2[-\pi, \pi]$. Anta också att restriktionen av f_N konvergerar mot restriktionen av f i L^2-mening, dvs.

att
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_N(x) - f(x)|^2 \, dx \to 0$$
då $N \to \infty$. Dessa periodiska funktioner kan också ses som distributioner på $\mathbb{R}$; visa att f_N då konvergerar svagt mot f (använd Cauchy-Schwarz olikhet).

(b) Tillämpa nu (a) på partialsummorna till Fourierserien $\sum_1^\infty (-1)^n \frac{\sin nx}{n}$, så här: Verifiera att partialsummorna
$$f_N(x) = \sum_1^N (-1)^n \frac{\sin nx}{n},$$
konvergerar i $L^2[-\pi, \pi]$ och hitta summan f i tabell. Alltså har man också svag konvergens om allt betraktas som distributioner.

(c) Derivera resultatet i (b) i distributionsmening, enligt sats, för att se att också $\sum (-1)^n \cos nx$ konvergerar svagt. Vad blir summan?

4. Summan
$$u = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \delta'_{1+2\pi k}$$
konvergerar svagt mot en distribution, som är 2π-periodisk. (Här betecknar $\delta'_{1+2\pi k}$ distributionsderivatan av distributionen $\delta_{1+2\pi k}$.) Vad är dess verkan $u[\phi]$ på en testfunktion ϕ? Enligt Follands Theorem 9.6 kan u utvecklas i Fourierserie, med svag konvergens. Vilken Fourierserie får man?

Ledning: Utgå från den kända summan $\sum \delta_{Tk}$, $T > 0$.

5. För $\mu > 0$ definierar
$$u_\mu[\phi] = \int_0^\infty x^{\mu-1} \phi(x) \, dx$$

en distribution u_μ på $\mathbb{R}$. Då $\mu \to 0$ har denna integral för de flesta testfunktioner ϕ inget ändligt gränsvärde; verifiera detta med exempel. Därför har distributionerna u_μ inget svagt gränsvärde då $\mu \to 0$. Detta kan avhjälpas genom multiplikation med en lämplig faktor. Bestäm en kvantitet $Q(\mu)$ sådan att $Q(\mu)u_\mu[\phi]$ konvergerar då $\mu \to 0$, för alla testfunktioner ϕ, och det mot ett värde som inte alltid är 0. Detta betyder att $Q(\mu)u_\mu$ konvergerar svagt då $\mu \to 0$, mot en distribution som inte är nolldistributionen. Ange också vilken denna gränsdistribution är. Man har alltid $\mu > 0$ här.

Ledning: För att gissa vad $Q(\mu)$ skall vara, ersätt först $\phi(x)$ i integralen med karakteristiska funktionen för ett intervall $(0, a)$. För en godtycklig testfunktion ϕ kan man sedan verifiera konvergensen genom att dela upp den givna integralen i integraler över $(0, a)$ och (a, ∞) och skriva ϕ som $\phi(x) = \phi(0) + (\phi(x) - \phi(0))$ i den första integralen. Detta ger tre integraler, som alla konvergerar då $\mu \to 0$.

6. En tempererad distribution u har en Fouriertransform i distributionsmening, som är en annan tempererad distribution. Med tanke på den vanliga definitionen av Fouriertransformen för integrabla funktioner är det naturligt att tänka sig att man får Fouriertransformen även av u genom att låta den verka på funktionen $\psi_\xi(x) = e^{-i\xi x}$. Men det går inte. Funktionen ψ_ξ är inte en Schwartzfunktion, än mindre en testfunktion, och u kan i allmänhet inte verka på ψ_ξ; exempelvis kan u vara given av ett polynom och kan då inte integreras mot ψ_ξ. Dock finns det en situation då detta fungerar.

   Låt nämligen u vara en distribution på $\mathbb{R}$ som är 0 utanför någon begränsad mängd. Det betyder att det finns något

$R > 0$ så att $u[\phi] = 0$ för testfunktioner ϕ som är 0 i intervallet $|x| \leq R$. Då är u tempererad. Enkla exempel är $u = \delta_q$ för $q \in \mathbb{R}$ och dess distributionsderivator $u = \delta_q^{(m)}$. Visa att en sådan u kan verka på alla ψ i $C^\infty(\mathbb{R})$, på följande sätt. Tag en testfunktion η som är 1 för $|x| \leq R$, och sätt $u[\psi] = u[\psi\eta]$; verifiera att denna definition är oberoende av valet av η. Då kan u alltså verka på funktionen $\psi_\xi(x) = e^{-i\xi x}$, där $\xi \in \mathbb{R}$. Visa att resultatet $u[\psi_\xi]$ blir (som man skulle gissa) Fouriertransformen $\hat{u}(\xi)$. (Fouriertransformen $\hat{u}$ är ju definierad som en tempererad distribution och blir alltså i detta fall en funktion.) Vad blir $\hat{u}$ i exemplen ovan?

7. Betrakta funktionen $u(x) = \ln|x|$ som en distribution i $\mathbb{R}^3$ och i $\mathbb{R}^2$. Man vill bestämma Δu, tagen i distributionsmening. Räkna först ut Δu i vanlig, punktvis mening utanför singulariteten i origo, eventuellt med hjälp av polära koordinater. Skriv sen upp den integral som ger verkan av distributionen Δu på en testfunktion. På denna integral kan man använda "Greens andra identitet", som uttrycker integralen av $f\Delta g - g\Delta f$ över ett område i termer av en integral över områdets rand.. (Slå upp denna identitet, t.ex. genom att googla på "Green's identities".) Välj ett begränsat område vars komplement innehåller ett litet klot kring origo, och låt sedan klotets radie gå mot 0. Blir resultatet att distributionen Δu ges av de punktvisa värdena eller inte?

8. Låt $a > 0$. Funktionen $u(x) = e^{iax^2}$ är begränsad och definierar därför en tempererad distribution på $\mathbb{R}$. Bestäm Fouriertransformen av denna distribution.

   Ledning: Verifiera att distributionen u är svaga gränsvärdet då $\epsilon \searrow 0$ av de integrabla funktionerna $u_\epsilon(x) = e^{(ia-\epsilon)x^2}$.

Deras Fouriertransformer ges av den vanliga integralen, som kan räknas ut genom komplex integration eller analytisk fortsättning från det kända fallet $a = 0$. Låt slutligen $\epsilon \to 0$.

9. Anta att distributionen u på $\mathbb{R}$ uppfyller $u' = 0$, den enklaste av alla differentialekvationer. Visa att u då är en konstant funktion. Att tillåta u att vara en distribution ger alltså inga "nya" lösningar.

   Ledning: Uttryck först ekvationen i termer av hur u verkar på testfunktioner, med hjälp av definitionen av distributionsderivata. Följande lemma kommer sen att behövas.

   Lemma. Om testfunktionen ϕ uppfyller $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, dx = 0$, så är $\phi = \psi'$ för någon testfunktion ψ.

   Med detta lemma kan man göra så här: Fixera en testfunktion ϕ_0 med $\int_{\mathbb{R}} \phi_0(x)\, dx = 1$. Visa med hjälp av lemmat att en godtycklig testfunktion ϕ kan skrivas som $\phi = C\phi_0 + \psi'$ där ψ är en testfunktion. Vilket värde får konstanten C? Låt nu u verka på denna uppdelning.

   Bevisa slutligen lemmat. (Man kan gissa hur ψ skall väljas.)

10. Efter en variabeltransformation kan vågekvationen i planet skrivas $\partial^2 u/\partial x_1 \partial x_2 = 0$. Det är enkelt och välkänt att den allmänna lösningen till denna ekvation är $u(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2)$, där f och g är godtyckliga deriverbara funktioner. Här har vi alltså en term som är oberoende av x_2 och en som är oberoende av x_1. Men i distributionsmening finns ytterligare lösningar, av analogt slag fast de är distributioner: En distribution v i planet kallas *oberoende av x_2* om den är given av en distribution v_1 på $\mathbb{R}$ på så sätt att för varje

testfunktion ϕ i planet

$$v[\phi] = v_1 \left[\int \phi(x_1, x_2)\, dx_2 \right].$$

Här menar vi att v_1 får verka på den 1-dimensionella testfunktionen $x_1 \mapsto \int \phi(x_1, x_2)\, dx_2$. Denna terminologi är rimlig, eftersom man ser att $v[\phi]$ inte ändras om man translaterar ϕ i x_2-axelns riktning. Vad blir v i specialfallet $v_1 = \delta'_a$, dvs. vad blir då $v[\phi]$ för en testfunktion ϕ?

Visa nu att varje distribution som är oberoende av x_2 satisfierar ekvationen $\partial^2 u/\partial x_1 \partial x_2 = 0$ i distributionsmening.

I detta resonemang kan man förstås låta x_1 och x_2 byta roller, och i själva verket ges den allmänna distributionslösningen till ekvationen av en summa av två distributioner som är oberoende av x_1 resp. x_2 (detta behöver ej visas).

11. Funktionen $1/x$ på $\mathbb{R}$ är inte integrerbar nära 0, men den görs till en distribution X^{-1}, även kallad P.V. $1/x$ eller principalvärdet av $1/x$, enligt formel (9.17) på sidan 324 i Folland. Bestäm Fouriertransformen av denna distribution, på följande sätt. Verifiera att produkten $x\, X^{-1}$ som väntat är den konstanta funktionen 1; här använder vi produkten av en (lämplig) funktion och en distribution, som definieras i Follands formel (9.6). Fouriertransformera denna produkt, vilket ger den sökta Fouriertransformens derivata. Sen finner man den sökta Fouriertransformen genom att ta en primitiv distribution, så när som på en additiv konstant. (Här tillåter vi oss att utnyttja huvudövning 9, som medför att två primitiva distributioner till samma distribution bara skiljer sig med en konstant.) Bestäm slutligen den additiva konstan-

ten genom att låta de inblandade distributionerna verka på Schwartzfunktionen e^{-x^2}, vars Fouriertransform man känner.

Använd resultatet för att också finna Fouriertransformen av Heavisidefunktionen.

12. Distributionen X^{-1}, även kallad P.V. $1/x$ eller principalvärdet av $1/x$, definieras i formel (9.17) på sidan 324 i Folland. Definitionen är ett sätt att göra funktionen $1/x$ till en distribution genom att hantera dess icke-integrabla singularitet i 0. Bestäm liksom i föregående övning Fouriertransformen av denna distribution, men nu med följande metod. Visa att X^{-1} är gränsvärdet i svag mening av distributionerna $u_n = \frac{x}{x^2+1/n^2}$. Bestäm sen Fouriertransformerna av u_n och deras svaga gränsvärde.

    Använd resultatet för att också finna Fouriertransformen av Heavisidefunktionen.

13. Vi ger ytterligare en metod att beräkna Fouriertransformen av den tempererade distributionen P.V. $1/x$, även kallad principalvärdet av $1/x$, som definieras i formel (9.17) på sidan 324 i Folland. Definitionen är ett sätt att göra funktionen $1/x$ till en distribution genom att hantera dess icke-integrabla singularitet i 0. (Jämför de två föregående övningarna.) Integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{x}\,dx$$

    "borde" ge Fouriertransformen. Men den divergerar både i 0 och i oändligheten, så den har ingen mening. Däremot är

$$\int_{\varepsilon<|x|<R} \frac{e^{-ix\xi}}{x}\,dx$$

väldefinierad för alla positiva ε och R .

(a) Visa att dessa integraler har ett gränsvärde då $\varepsilon \to 0$ och $R \to \infty$. Vad är detta gränsvärde, som funktion av ξ ?

Ledning: Skriv om exponentialuttrycket med cosinus och sinus, och behandla vardera termen för sig. Man kan ha nytta av formel (29) i BETA 7.5, sidan 180.

(b) Visa därefter att gränsvärdet faktiskt är Fouriertransformen av P.V. $1/x$, genom att visa att de tempererade distributionerna

$$\frac{e^{-ix\xi}}{x}\,\chi_{\varepsilon<|x|<R}$$

konvergerar mot P.V. $1/x$ i "tempererad distributionsmening", dvs. deras verkan på varje Schwartzfunktion konvergerar. I Folland kallas detta "temperate convergence". Eftersom de väldefinierade integralerna ovan ger Fouriertransformerna av dessa tempererade distributioner, räcker det sen att förvissa sig om att konvergens i tempererad distributionsmening medför konvergens för Fouriertransformerna, se Folland.

14. Theorem 9.6 i Folland säger att varje 2π-periodisk distribution F kan utvecklas i en Fourierserie $F = \sum c_n e^{inx}$ som konvergerar svagt mot F. (Folland har glömt att ange att perioden skall vara 2π.) Men för att finna koefficienterna c_n kan man inte använda den vanliga integralformeln

$$(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-inx}\,dx.$$

Denna integral saknar i allmänhet mening, eftersom distributionen F inte kan verka på den funktion g som är $(2\pi)^{-1}$ i intervallet $[-\pi,\pi]$ och 0 för övrigt, för g är ingen testfunktion. Men man kan få koefficienterna genom att låta F

verka på en testfunktion χ som i viss mening approximerar g. Detta beskrivs i Follands övning 9.3.1; genomför denna övning. Observera då tryckfelen: i definitionen av $\chi(x)$ (den första formeln i övningen) skall $(1-t)$ i exponenterna i båda integralerna vara $(2\pi - t)$. Substitutionen som nämns i del a skall vara $s = 2\pi - t$. (Här betecknar χ förstås inte någon karakteristisk funktion.)

Ledning till del c av Follands övning: Tillämpa först formeln i del b på $f(x) = e^{i\ell x}$. Utnyttja sen att $F[\phi] = \sum c_n \int e^{inx}\phi(x)$ för alla testfunktioner ϕ, och välj $\phi(x) = \chi(x)e^{-ikx}$.

15. Denna övning handlar om vilka distributioner u som löser ekvationen $\psi u = 0$ för en given oändligt deriverbar funktion ψ. Definitionen av sådana produkter ψu är Follands formel (9.6).

(a) Visa att ekvationen $\frac{1}{1+x^2}u = 0$ endast har lösningen $u = 0$. Utgå från definitionen av produkt.

(b) Verifiera att ekvationen $xu = 0$ har lösningarna $u = C\delta$, där C är en godtycklig konstant.

(c) Med hjälp av ett lemma skall vi se att ekvationen i (b) inte har några andra lösningar än dessa. Fixera en testfunktion ψ_0 med $\psi_0(0) = 1$.

Lemma. Varje testfunktion ϕ kan skrivas som $\phi = \phi(0)\psi_0 + x\psi$, för någon testfunktion ψ.

Anta att u löser ekvationen. Låt u verka på en testfunktion ϕ, och använd lemmat för att visa att $u = C\delta$ för något C.

(d) Bevisa lemmat, t.ex. så här: Formeln i lemmat tvingar oss att välja ψ som

$$\psi(x) = \frac{\phi(x) - \phi(0)\psi_0(x)}{x} = \frac{\tilde{\psi}(x)}{x},$$

där $\tilde{\psi}$ definieras av den andra likheten. Det gäller att visa att ψ är en testfunktion. Verifiera först att $\tilde{\psi}$ är en testfunktion med den extra egenskapen att $\tilde{\psi}(0) = 0$. Då skall man visa att kvoten $\tilde{\psi}(x)/x$ också är en testfunktion. Det enda problemet är dess uppförande vid 0. Detta kan man klara genom att skriva $\tilde{\psi}(x)$ som integralen av derivatan från 0 till x och transformera till en integral från 0 till 1. I den senare integralen kan man sen derivera m.a.p. x.

16. Sätt för $\varepsilon > 0$

$$u_\varepsilon[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} |\sin x|^{\varepsilon - 1} \phi(x)\, dx$$

för varje testfunktion ϕ. Eftersom integralen konvergerar definierar detta en distribution u_ε. Visa att uttrycket i allmänhet divergerar då $\varepsilon \to 0$, men att distributionerna $\varepsilon u_\varepsilon$ konvergerar svagt då $\varepsilon \to 0$. Mot vilken distribution konvergerar de?

Ledning: Det väsentliga här är vad som händer nära sinusfunktionens nollställen, alltså heltalsmultiplerna av π. Visa först att om man tar bort en δ-omgivning av varje sådan punkt $k\pi$, så går integralen över det som återstår mot 0 då $\varepsilon \to 0$. Nära varje $k\pi$ kan man sen approximera $\sin x$ med första termen i Taylorutvecklingen kring $k\pi$ och uppskatta felet, och skriva $\phi(x) = \phi(k\pi) + (\phi(x) - \phi(k\pi))$.

17. Den 2π-periodiska funktionen $\cot\frac{x}{2}$ definierar en 2π-periodisk distribution u om man tar dess principalvärde vid singulariteterna, alltså vid punkterna $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. För en testfunktion ϕ innebär detta att

$$u[\phi] = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x-2\pi n|>\varepsilon,\, n\in\mathbb{Z}} \cot\frac{x}{2}\,\phi(x)\,dx.$$

(a) Verifiera att detta gränsvärde existerar för varje testfunktion ϕ, så att man får en distribution.

Ledning: Utnyttja vid punkten 0 att cotangensfunktionen är udda, genom att subtrahera $\phi(0)$ från ϕ i t.ex. intervallet $[-1, 1]$. Jämför med definitionen av P.V. $1/x$ i Folland, sidan 324. Motsvarande i andra punkter $2\pi n$.

(b) Enligt Theorem 9.6 på sidan 322 i Folland kan varje periodisk distribution utvecklas i Fourierserie. (Folland har glömt att ange att perioden skall vara 2π.) Bestäm utvecklingen av u.

Ledning: Visa genom (försiktig) partialintegration att u är distributionsderivatan av funktionen $2\ln|\sin\frac{x}{2}|$, vars Fourierserie finns i tabell. Derivera termvis.

18. Anta ζ är ett komplext tal med $\operatorname{Im}\zeta > 0$.

(a) Bestäm Fouriertransformen $\hat{g}$, där $g(x) = \frac{1}{x^2-\zeta^2}$, exempelvis med en komplex integration.

(b) Beräkna den 1-periodiska funktionen

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x+n),$$

lämpligen genom att använda (a) och formeln i övning 9.4.15 i Folland, efter att ha gjort denna övning som är ganska enkel.

Observera att den serie man får är Fourierserien för f. Summera därefter denna serie.

19. Den klassiska vågekvationen $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ i en rumsdimension har den allmänna lösningen $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$, där f och g är godtyckliga, två gånger deriverbara funktioner på $\mathbb{R}$. Här är $c > 0$ en konstant. Detta är välkänt och skall ej visas.

    Vi skall se att samma formel ger lösningar i distributionsmening även under svagare villkor på f och g. Eftersom $f(x+ct)$ och $g(x-ct)$ kan behandlas helt analogt, nöjer vi oss med det första fallet.

    Om f är en kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}$, så är $f(x+ct)$, betraktad som funktion i (x,t)-planet, en distribution u i planet. Visa att u uppfyller vågekvationen i distributionsmening.

    Ledning: Man skall visa att verkan av distributionen $u_{tt} - c^2 u_{xx}$ på en godtycklig testfunktion, alltså $(u_{tt} - c^2 u_{xx})[\phi]$, är noll. Använd definitionen av distributionsderivata för att skriva detta uttyck som en integral i planet som innehåller f och derivator av ϕ. Gör ett lämpligt variabelbyte i denna integral.

20. Med δ menar vi Diracdistributionen på $\mathbb{R}$. Vi vill ge mening åt uttrycket $\delta(x+ct)$, som en distribution u i planet. Här är $c > 0$ en konstant. För att definiera dess verkan på en tvådimensionell testfunktion ϕ tolkar vi "integralen"

$$\int\int \delta(x+ct)\phi(x,t)\,dxdt$$

    genom att först "integrera" i x, varvid $\delta(x+ct)$ plockar ut värdet av $\phi(x,t)$ för $x = -ct$. Man får alltså

$$\int \phi(-ct,t)\,dt,$$

som blir definitionen av $u[\phi]$. Lägg märke till att $u[\phi]$ bara beror av ϕ:s värden på en viss delmängd av planet; rita denna delmängd. Verifiera därefter att distributionen u uppfyller vågekvationen $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$. (Detta är en distributionslösning till vågekvationen, som inte är en funktion och därmed inte en lösning i vanlig mening. Jämför med föregående övning.)

Ledning: För att se att $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ i distributionsmening, observera först att

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right) u.$$

Det räcker alltså att visa att $\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. Visa detta genom att kombinera uttrycket för $u[\phi]$, definitionen av distributionsderivator och kedjeregeln tillämpad på $\frac{d}{d\tau}\phi(-c\tau,\tau)$.

21. För $0 < \lambda < 1$ är funktionen $x^{-\lambda}H(x)$ lokalt integrerbar och definierar en tempererad distribution kallad $X_+^{-\lambda}$. Bestäm dess Fouriertransform, exempelvis genom att först observera att $X_+^{-\lambda}$ är svaga gränsvärdet av de integrabla funktionerna $e^{-\epsilon x} x^{-\lambda} H(x)$ då $\epsilon \searrow 0$. Dessas Fouriertransformer ges, enligt definitionen, av integralen

$$\int_0^\infty e^{-(\epsilon+i\xi)x} x^{-\lambda}\,dx,$$

som kan beräknas med hjälp av variabeltransformationen $x' = (\epsilon + i\xi)x$. Observera då att man får en integral över en stråle i komplexa planet. För att komma tillbaka till $\mathbb{R}_+$

använder man Cauchys integralsats och uppskattar integralen över en cirkelbåge. Detta leder till den integral som definierar $\Gamma(z)$ för komplexa z, se BETA 12.5, sidan 287. Låt sen $\epsilon \searrow 0$. Denna uppgift är fallet $0 < \lambda < 1$ av Follands övning 9.4.12, sidan 340.

22. Gör övning 9.5.3 i Folland. Den handlar om att distributionslösningar till ekvationen $\Delta u = f$, där f är en "snäll" funktion, i själva verket är lösningar i vanlig mening.

23. (a) Sätt $u_N(x) = N \sin Nx$ på $\mathbb{R}$ och betrakta denna funktion som en distribution. Visa, t ex. genom partialintegrationer, att u_N konvergerar svagt mot en distribution (vilken?) då $N \to \infty$. Skissa grafen för u_N; kan den förklara distributionskonvergensen, trots avsaknaden av punktvis konvergens? Vad händer om sin byts ut mot cos?

    (b) Samma frågor för $v_N(x) = H(x)N \cos Nx$ och för $H(x)N \sin Nx$.

    (c) Samma frågor för $w_n(x) = H(x)\,\frac{\sin Nx}{x}$. (Bara för sinus)

    Ledning till (c): Bilda integralen av w_n multiplicerad med en testfunktion. Där kan man partialintegrera på så sätt att man tar en primitiv funktion till $\frac{\sin Nx}{x}$, exempelvis $g(x) = \int_0^x \frac{\sin Nx'}{x'}\,dx'$. Utnyttja sen att $\int_0^M \frac{\sin t}{t}\,dt$ har ett känt gränsvärde då $M \to \infty$.

24. (a) Betrakta för $r > 0$ distributionen u_r på $\mathbb{R}$ definierad av

$$u_r[\phi] = r^{-3} \int_{-r}^{r} (\phi(x) - \phi(0))\,dx,$$

    där ϕ är en testfunktion. Visa att u_r har ett svagt gränsvärde v då $r \to 0$, och att distributionen v ges av att $v[\phi]$ är en multipel av $\phi''(0)$. Vilken multipel får man?

Ledning: Taylorutveckla.

(b) Gör motsvarande i planet, med

$$u_r[\phi] = r^{-4} \int_{x^2+y^2<r^2} (\phi(x,y) - \phi(0,0))\, dxdy.$$

Visa att man som gränsvärde här får en multipel (vilken?) av Laplaceoperatorn i 0.

(c) Hur ser detta ut i n dimensioner?

25. Låt χ_A, χ_B och χ_C beteckna de karakteristiska funktionerna för nedanstående mängder i $\mathbb{R}^2$:
$A = \{(x_1, x_2) : x_1 < 0,\ x_2 < 0\}$
$B = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 < 0\}$
$C = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$.

Dessa funktioner kan betraktas som distributioner i planet. Bestäm distributionsderivatorna

$$\partial\chi_A/\partial x_1, \qquad \partial\chi_B/\partial x_1 \qquad \text{och} \qquad \partial\chi_C/\partial x_1$$

samt andraderivatorna $\partial^2\chi_A/\partial x_1\partial x_2$ och $\partial^2\chi_B/\partial x_1\partial x_2$.

Svaret bör vara uttryck som anger hur dessa derivator verkar på en testfunktion, och uttrycken skall inte innehålla några derivator av testfunktionen.

26. Låt u vara distributionen $u = \ln|x|$ på $\mathbb{R}$.

(a) Bestäm dilationerna $u^{[a]}$ för $a > 0$. Är u homogen, och i så fall av vilket gradtal? Se Folland sidan 311 och övning 9.1.1.

(b) Visa att distributionsderivatan u' är den distribution X^{-1}, principalvärdet av $1/x$, som definieras i formel (9.17) på sidan 324 i Folland. Ledning: Partialintegrera, men undvik då singulariteten i 0.

(c) Genomför (a)-delen med u ersatt av u'.

27. Den funktion på $\mathbb{R}$ som tar värdena $1/\sqrt{x}$ för $x > 0$ och 0 för $x \leq 0$ är lokalt integrerbar även vid singulariteten i 0. Därför definierar den en distribution på $\mathbb{R}$, som i Folland betecknas $X_+^{-1/2}$. Vi vill bestämma derivatan av denna distribution. Funktionens punktvisa derivata tar värdena $-x^{-3/2}/2$ för $x > 0$ och är inte lokalt integrerbar. Den definierar därför inte automatiskt någon distribution. Vi skall se att distributionsderivatan av $X_+^{-1/2}$ ändå hänger ihop med den punktvisa derivatan. Visa att denna distributionsderivata är $-X_+^{-3/2}/2$ där distributionen $X_+^{-3/2}$ ges i övning 9.3.9 i Folland, i specialfallet $\lambda = 3/2$ och med ett lämpligt k.

    Ledning. Skriv upp vad distributionsderivatans verkan på en testfunktion ϕ blir, enligt definitionen. (Jämför ev. med Folland formel (9.22) för $X_+^{-\lambda}$ på sidan 327.) För att komma härifrån till uttrycket i övning 9.3.9, partialintegrera i de två intervallen $(\varepsilon, 1)$ och $(1, \infty)$. Som primitiv funktion till ϕ' väljer man i det förstnämnda intervallet inte ϕ utan $\phi - \phi(0)$. Sen får $\varepsilon \to 0$.