Laboration i Fourieranalys för F2, TM2, Kf2 2013/14
Signalanalys med snabb Fouriertransform (FFT)

Den här laborationen har två syften: dels att visa hur den snabba Fouriertransformen fungerar och vad man bör tänka på när den används, dels att verkligen testa den på ett par exempel.

Laborationen består av tre uppgifter, men för F2 och Kf2 ingår bara de två första. Den tredje är enbart för TM2. För samtliga kan laborationen ge upp till 4 bonuspoäng vid tentamen. Den är inte obligatorisk, men rekommenderas.

De olika uppgifterna går ut på att

1. med olika samplingsfrekvenser, och olika antal sampel analysera en ren sinussignal.
2. studera ett linjärt filter, och sedan se hur "brus" passerar filtret och hur man hittar signaler i brus
3. (för TM) studera effekter av ickelineariteter i filter.

Det enklaste är att göra dessa uppgifter med hjälp av Matlab, och denna beskrivning är anpassad till det.

Rapport

Rapporten skall innehålla utskrifter av plottarna, i en skala där det som är väsentligt för uppgiften går att se. Till varje deluppgift bör man skriva ett par rader som förklarar vad plottarna visar och varför de ser ut som som de gör.

Rapporterna får vara handskrivna *under förutsättning att de skrivs med läslig handstil*.

Allmänt om diskret och snabb Fouriertransform

Detta är en kortfattad beskrivning; läs också i Follands bok.

Låt $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en signal, och låt

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

vara dess Fouriertransform. Vi skall först anta att f är *bandbegränsad*, d.v.s. att det finns en konstant Ω så att $\hat{f}(\omega) = 0$ om $|\omega| > \Omega$. Samplingssatsen säger då att f är bestämd om man känner $f(t_n)$ i punkterna $t_n = n\pi/\Omega$. Den mest högfrekventa möjliga komponenten i f är alltså $e^{\pm i\Omega t}$, med period $2\pi/\Omega$. Samplingssatsen innebär alltså att man måste ha minst två sampel per period för den högsta tillåtna frekvensen. Om det dessutom är så att man bara är intresserad av $f(t)$ i ett begränsat intervall, säg $0 \le t \le T$, räcker det därför väsentligen att betrakta de sampelpunkter som faller inom detta intervall; antalet punkter blir då ungefär $N = T\Omega/\pi$. Funktionen kan visserligen inte vara noll utanför $[0, T]$ (eller något annat begränsat intervall) om den är bandbegränsad, men under lämpliga förutsättningar blir felet inte så stort.

Därför antar vi (felaktigt) att $f(t) = 0$ utanför intervallet $[0, T]$. Då skulle man kunna använda samplingssatsen med ombytta roller för f och $\hat{f}$; väsentligen har $\hat{f}$ bandbredd $T/2$. Det borde innebära att det räcker att känna värdena $\hat{f}(\omega_n)$ för $\omega_n = n2\pi/T$, för alla $|\omega_n| \le \Omega$.
För att snabbt komma fram till den diskreta Fouriertransformen väljer vi N och sätter

$$a_n = f(nT/N) \qquad \text{och} \qquad \hat{a}_m = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{-i2\pi mn/N}.$$

Eftersom $-i2\pi mn/N = -i2\pi\omega_n nT/N$ blir summan här, efter multiplikation med steglängden T/N, en Riemannsumma till integralen $\int f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt = \hat{f}(\omega_m)$. Det betyder att $\hat{a}_m T/N$ bör vara en bra approximation av $\hat{f}(\omega_m)$. Därför kallas följden $\hat{a}_m$ den diskreta Fouriertransformen av följden $(a_n)_0^{N-1}$. Observera att $\hat{a}_m$ är periodisk med period N, så att det räcker att betrakta $(\hat{a}_m)_0^{N-1}$. I de fall vi sysslar med har man dessutom symmetrier som gör det tillräckligt att betrakta bara hälften så många värden, $0 \le m < N/2$. Se uppgift 1.1 nedan.
Precis som för Fouriertransformen finns det en inversionsformel för att beräkna a_m om $\hat{a}_m$ är kända:

$$a_n = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} e^{i2\pi mn/N}\hat{a}_m.$$

Problemet är nu att för att man skall få någon noggrannhet i beräkningarna krävs det att N är stort, och då blir det kostsamt att utföra beräkningarna: det är N koefficienter att beräkna, och för varje n skall en summa med N termer beräknas, i allt N^2 operationer. Men det finns ett sätt att göra beräkningarna mycket snabbare, det som kallas snabb Fouriertransform (FFT).

Antag först att N är delbart med 2, säg $N = 2N_1$. Då kan man skriva

$$\begin{aligned}
\hat{a}_m &= \sum_{n=0}^{N_1-1} a_{2n}e^{-i2\pi m2n/2N_1} \quad + \sum_{n=0}^{N_1-1} a_{2n+1}e^{-i2\pi m(2n+1)/2N_1} \\
&= \sum_{n=0}^{N_1-1} a_{2n}e^{-i2\pi mn/N_1} \quad + e^{-i2\pi m/N}\sum_{n=0}^{N_1-1} a_{2n+1}e^{-i2\pi mn/N_1}
\end{aligned} \tag{1}$$

Om man tittar efter, ser man att den första summan i (1) är en diskret Fouriertransform av de N_1 *jämna* koefficienterna a_{2n}, och den andra summan av de N_1 *udda* koefficienterna a_{2n+1}. Vi skriver $a_n^j = a_{2n}$ och $a_n^u = a_{2n+1}$ för de udda respektive jämna koefficienterna, där nu $n = 0, \dots N_1 - 1$ så att dimensionen halveras. Med motsvarande beteckningar för de diskreta Fouriertransformerna får vi

$$\hat{a}_m = \hat{a}^j_m + e^{-i2\pi m/N} \hat{a}^u_m \qquad \text{för} \qquad 0 \leq m \leq N_1 - 1 = N/2 - 1,$$

där $\hat{a}^j_m$ och $\hat{a}^u_m$ är periodiska med period N_1.
Kostnaden för att beräkna $\hat{a}^j_m$ och $\hat{a}^u_m$ är i storleksordningen $2N_1^2 = N^2/2$ operationer. Förutom det går det åt en multiplikation och en addition per m, alltså sammanlagt $N^2/2 + N$ operationer (en operation räknas i dessa sammanhang ofta som en addition och en multiplikation). Kostnaden har halverats. Men den stora vinsten gör man om N_1 i sin tur är ett jämnt tal, så att även $\hat{a}^j_m$ och $\hat{a}^u_m$ kan beräknas på liknande sätt, och så vidare. Optimalt resultat får man om $N = 2^k$, sämst får man om N är ett primtal (för då kan man inte göra något alls åt kostnaden).
Av detta skäl vill man ofta välja N som en tvåpotens, och om man har ett antal sampelvärden som ligger nära en tvåpotens kan det se ut som en god ide att helt enkelt fylla på med så många nollor som behövs. Det görs i alla händelser ofta i praktiken ibland. Men i matlab faktoriseras istället N i så många primfaktorer som möjligt, och man vinner den beräkningstid som går.

Laborationsuppgift 1

Denna del av laborationen går mest ut på att bekanta sig med `fft` i matlab. Börja med att starta matlab och läsa manualbladet till `fft`

1. Sampla signalen $f(t) = \sin(8t) + 2\cos(15t)$ N gånger i intervallet $0 \leq t < T$, där $T = 100$, dvs. skapa en vektor `x = [x(1), x(2), ..., x(N)]`, där `x(k+1)= f(kT/N)` är det k-te stickprovet ("samplet") av signalen. Observera att numreringen av vektorelement i matlab alltid startar med 1. Välj som N några olika 2-potenser (stora och små) och beräkna den diskreta Fouriertransformen av `x` med hjälp av funktionen `fft`. Plotta dess absolutbelopp och i ett par fall också dess real- och imaginärdelar. Börja då med att plotta Fouriertransformen i hela intervallet $[1, N]$ och lägg märke till symmetrierna kring mittpunkten, som gör att man kan nöja sig med att *plotta den diskreta Fouriertransformen i halva intervallet* $[1, N/2]$, här och i det följande. Man vill förstås sampla så att frekvenserna 8 och 15 i Fouriertransformen blir tydligt synliga.

   Steglängden vid samplingen är $h = T/N$, i tidsvariabeln. Poängen med den här delen av uppgiften är att se att denna steglängd måste vara tillräckligt liten för att man ska kunna upptäcka alla frekvenser hos signalen. För att göra detta mera precist kan man jämföra med samplingssatsen. Signalen är bandbegränsad med en högsta frekvens ω_{max}, som i vårt fall är 15. Då säger samplingssatsen att signalen är bestämd av den samplade signalen om $h\omega_{max} \leq \pi$. Satsen kräver egentligen att man samplar f över hela reella axeln, men resultatet stämmer rätt väl ändå. Man brukar uttrycka detta i termer av den s.k. samplingsfrekvensen

$\nu = 2\pi/h$. (Antalet samplingar per tidsenhet är $1/h$, och om det handlade om en rotation skulle man få faktorn 2π genom att gå över från varv till radianer per tidsenhet. Man säger också vinkelfrekvens.) Nu blir olikheten $\nu \geq 2\omega_{max}$. Samplingsfrekvens måste alltså minst vara $2\omega_{max}$, som kallas Nyquistfrekvensen eller Nyquistgränsen. I vårt fall är $\nu = 2\pi N/T$ så vi får $2\pi N/T \geq 2\omega_{max}$. Med $T = 100$ och $\omega_{max} = 15$ fungerar exempelvis $N = 2^9 = 512$ mycket bra för att göra frekvenserna $\omega = 8$ och $\omega = 15$ synliga. Undersök vilka 2-potenser som går bra som N-värde.

2. Två sätt att modulera en radiovåg för att överföra till exempel tal är *amplitudmodulering* och *fasmodulering*. Låt oss som ett exempel betrakta en bärfrekvens på $\nu = 50$ MHz (alltså kortvågsbandet), och antag att "talet", dvs. den signal man vill överföra, består av signalen $\phi(t)$. Den modulerade signalen kommer då att ha utseendet

$$f_A(t) = (1 + \alpha\phi(t))\cos(\nu t) \qquad \text{(am)}, \quad \text{resp.}$$
$$f_F(t) = \cos(\nu t + \alpha\phi(t)) \qquad \text{(fm)}\,.$$

I båda fallen är α en konstant som bestämmer moduleringsgraden.
Välj nu $\nu = 60$ och $\alpha = 0.2$, och antag att

$$\phi(t) = \sin(4t) + 0.5\cos(7t).$$

Plotta den modulerade signalen, och dess spektrum (med hjälp av `fft`) för amplitud- och fasmodulering. Vilka frekvenser är det man ser? (Prova ev. att variera frekvenserna i ϕ.)

Laborationsuppgift 2

En vanlig typ av "signal" är brus. Det innebär att $\phi(t)$ på något sätt är slumpvis fördelat. En samplad signal som vi är intresserade av här kan ha olika beteende. Ett är att $\phi(t_n)$ är helt oberoende av varandra, till exempel normalfördelade. Med matlab kan en sådan brussignal (med N sampel) genereras genom

```
phi = randn(1,N).
```

Ett annat slags brus, betecknat ψ, uppstår om i stället differenserna $\psi(t_{n+1}) - \psi(t_n)$ är oberoende slumptal. I matlab kan man skriva t.ex.

```
psi(1) = phi(1);
for j=2:N, psi(j)=psi(j-1)+phi(j); end
```

(För att få ett mer realistiskt brus borde man här egentligen byta `phi(j)` i summan mot `phi(t)*sqrt(dt)`, där `dt`$= \Delta t = t_{n+1} - t_n$, men det ger bara ett fel med en konstant faktor, och för vårt ändamål spelar det ingen roll.)
Jämför resultaten mellan föregående exempel och λ, som ges av

```
lambda(1) = phi(1);
for j=2:N, lambda(j)=phi(j-1)+phi(j); end
```

1. Skapa brussignaler `phi`, `psi` och `lambda` enligt ovanstående. Plotta tidsserierna, och även deras spektra med hjälp av fft-algoritmen. Varför får spektrum olika utseende i de tre fallen?

2. Med hjälp av spektralanalys kan man försöka hitta signaler i brus. På kurshemsidan finns en länk till en fil som innehåller sampel från en brusig signal, samplad över ett tidsintervall på 10 sekunder. Hämta hem den, läs in den i matlab, och undersök om det finns något i den som liknar en signal. Ange i så fall tydliga frekvenser, och deras relativa amplitud. **OBS**. Datafilerna genereras individuellt till var och en som hämtar den. Följ instruktionerna för nedhämtning. I laborationsrapporten skall identifikationstalet `ftal` anges.

3. Ett enkelt filter kan modelleras med en differentialekvation

$$v''(t) + 2kv'(t) + \omega^2 v(t) = f(t);$$

   här är $f(t)$ insignalen, och $v(t)$ utsignalen. Denna deluppgift består i att mata in bruset `phi` som beskrivits ovan och plotta spektrum för utsignalen. I matlab kan man göra det på detta sätt:

   - Konstruera en matlabfunktion, en fil `odedef.m`, som innehåller definitionen av differentialekvationen, enligt

```
function out1 = odedef(t,y)
global tlist flist; % tlist  och flist är vektorer
                    % som innehåller sampeltidpunkter
                    % och sampelvärden för
                    % insignalen
a=0.25;  % 2k, som är dämpning
b=100.0;  % omega^2
out1 = [y(2); ...
        interp1(tlist,flist,t) ...
                  % detta skapar en interpolerad
                  % funktion av (tlist, flist)
         -a*y(2)-b*y(1)];
```

   - Skapa sedan en matlab skriptfil till exempel så här:

```
% globala deklarationer
global tlist flist
N = 10000;
Tmax = 10.0;
dt = Tmax / N;
tlist = dt : dt : Tmax;
% skapa en insignal ...
flist = 10*randn(1,N);
[ T, v ] = ode45('odedef', tlist, [0, 0]);
```

Efter körning av denna fil innehåller `v(j,1)` lösningen vid tid t_j, och `v(j,2)` innehåller lösningens derivata.

Vilka frekenser syns i utsignalen?

Laborationsuppgift 3 (avsedd endast för TM)

Denna del av laborationen handlar om ickelineariteter och hur dessa påverkar spektrum.

1. En förstärkare skall idealt sett vara linjär, utsignalen $v(t)$ skall vara proportionell mot insignalen $f(t)$:

$$v(t) = Kf(t)\,.$$

En riktig förstärkare kan istället tänkas ge en utsignal på formen

$$v(t) = Kf(t) + bf(t)^2 + cf(t)^3,$$

där konstanterna b och c ej båda är 0. Låt $f(t) = \cos(8t)$ eller $f(t) = \cos(8t) + \sin(11t)$. Studera med dessa två funktioner f utsignalens spektrum. Välj i båda fallen minst tre kombinationer av värden på b och c som ger väsentligt olika utfall. Gör också en teoretisk analys för att förklara de erhållna resultaten, t ex med hjälp av additionssatser för trigonometriska funktioner.

2. Vi går tillbaka till filtrets differentialekvation, men modifierar den en aning:

$$v''(t) + bv(t)(1 + \eta v(t)^2) = A\cos(\omega t),$$

med $b \neq 0$ och $\eta \neq 0$. I denna ekvation har dämpningen tagits bort, men en ickelinjär (kubisk) term har tillkommit. Ekvationen brukar kallas Duffingekvationen. Studera spektrum av lösningen $v(t)$ som ovan, för några kombinationer av η, b, ω och A. Det viktigaste är att variera η. Visa med exempel att ett stort η-värde ger ett kaotiskt beteende, och att ett η av samma storleksordning som b kan ge ett tämligen regelbundet beteende.

3. Icke-lineariteten i Duffingekvationen visar sig på flera sätt. Visa först att lösningen inte är proportionell mot A, genom att hitta ett exempel som gör detta tydligt. Visa också att lösningen inte beror additivt av högerledet, t.ex. så här: Ersätt högerledet med en summa av två cosinusfunktioner med olika frekvenser. Åskådliggör genom att titta på spektrum att lösningen för summan inte är summan av lösningarna för var och en av cosinusfunktinerna.