Fourieranalys MVE030 och Fourier Metoder MVE290 23.augusti.2016
Betygsgränser: 3: 40 poäng, 4: 50 poäng, 5: 60 poäng.
Maximalt antal poäng: 80.
Hjälpmedel: BETA och en typgodkänd räknedosa.
Examinator: Julie Rowlett.
Telefonvakt: Anders Martinsson 5325

1. (Prove properties of solutions to regular Sturm-Lioville problems): Låt f och g vara egenfunktioner till ett regulärt SLP i intervallet $[a, b]$ med $w \equiv 1$. Låt λ vara egenvärden till f och μ vara dess till g. Bevisa:

   (a) $\lambda \in \mathbb{R}$ och $\mu \in \mathbb{R}$;

   (b) Om $\lambda \neq \mu$, gäller:
   $$\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx = 0.$$

   (10 p)

2. (Prove the best approximation theorem): Låt $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vara en ortonormala mängd i ett Hilbert-rum, H. Om $f \in H$, bevisa:
   $$||f - \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle f, \phi_n\rangle \phi_n|| \leq ||f - \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \phi_n||, \quad \forall \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2.$$
   Bevisa att $=$ gäller $\iff$ $c_n = \langle f, \phi_n\rangle$ gäller $\forall n \in \mathbb{N}$.

   (10p)

3. Antag att $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ är egenfunktionerna med egenvärdena $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ till ett regulärt Sturm-Liouvilleproblem på intervallet $[a, b]$,
   $$Lu + \lambda u = 0.$$
   Med hjälp av $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ och $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, bestämma alla lösningar $u \in \mathcal{L}^2([a, b])$ till:
   $$u + Lu = 0, \quad x \in [a, b].$$

   (10 p)

4. Beräkna:
   $$\int_{\mathbb{R}} \frac{t^2}{(t^2+9)(t^2+16)}dt.$$

   (10 p)

5. Sök en begränsad lösning till:

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = \frac{1}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(10 p)

6. Lös problemet:

$$\begin{aligned} (1+t)u_t &= u_{xx}, & 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ u(0,t) &= 0, & t > 0, \\ u(2,t) &= 0, & t > 0, \\ u(x,0) &= 2x, & 0 < x < 2. \end{aligned}$$

(10 p)

7. Hitta polynomet $p(x)$ av högst grad 1 som minimerar:

$$\int_0^1 |e^x - p(x)|^2 dx.$$

(10 p)

8. Låt

$$I_0(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2}.$$

Visa att gäller:

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x\cos(\theta)} d\theta.$$

Formler:

1. $\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$
2. $\widehat{fg}(\xi) = (2\pi)^{-1}(\hat{f} * \hat{g})(\xi)$
3. $\widehat{e^{-ax^2/2}}(\xi) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^{-\xi^2/(2a)}$
4. $\widehat{xf(x)}(\xi) = i\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi)$
5. En föjld $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ med $c_n \in \mathbb{C}\ \forall n \in \mathbb{N}$ är i $\ell^2 \iff$
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 < \infty.$$
6. $\widehat{\frac{1}{x^2+a^2}}(\xi) = (\pi/a)e^{-a|\xi|}$.
7. $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$.
8. Binomial sats: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$, med $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.