Fourieranalys MVE030 och Fourier Metoder MVE290 lp3 5.april.2016
Betygsgränser: 3: 40 poäng, 4: 50 poäng, 5: 60 poäng.
Maximalt antal poäng: 80.
Hjälpmedel: BETA och en typgodkänd räknedosa.
Examinator: Julie Rowlett.
Telefonvakt: Johannes Borgquist ankn 5325

1. Bevisa:
$$e^{xz/2-x/(2z)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(x)z^n, \quad J_n \text{ är Besselfunktionen av grad } n.$$
(10 p)

2. Låt $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vara ortogonala i ett Hilbert-rum, H. Bevisa att följande tre är ekvivalenta:
$$(1) \quad f \in H \text{ och } \langle f, \phi_n \rangle = 0 \forall n \in \mathbb{N} \implies f = 0.$$
$$(2) \quad f \in H \implies f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n.$$
$$(3) \quad ||f||^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 .$$
(10 p)

3. Antag att $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ är egenfunktionerna med egenvärdena $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ till ett regulärt Sturm-Liouvilleproblem på intervallet $[a, b]$,
$$Lu + \lambda u = 0.$$
Med hjälp av $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ och $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, lös:
$$u_t + Lu = 0, \quad t \geq 0,\ x \in [a, b],$$
$$u(0, x) = f(x) \in L^2([a, b]), \quad \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty.$$
(10 p)

4. Lös:
$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$
$$u(0, y) = u(1, y) = 0,$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, 1) = g(x),$$
med f och g kontuerliga på $[0, 1]$. (10 p)

5. Sök en begränsad lösning till:

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$
$$u(0,x) = x^2 e^{-x^2}.$$

(10 p)

6. Antag att

$$\int_{-4}^{5} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Bestäm:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx.$$

Motivera ditt svar! (10 p)

7. Hitta polynomet $p(x)$ av högst grad 2 som minimerar

$$\int_{-2}^{2} |x^5 - p(x)|^2 dx.$$

(10 p)

8. Låt $f(x) = e^x$, $-\pi < x \le \pi$, och förläng f till en 2π-periodisk funktion på $\mathbb{R}$.
   (a) Bestäm Fourier-serien av f.
   (b) Gäller det att Fourier-koefficienterna till f', c_n', upfyller $c_n' = inc_n$, där c_n är Fourier-koefficienterna till f? Motivera ditt svar!

(10 p)

Formler:

1. $\widehat{f*g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$
2. $\widehat{fg}(\xi) = (2\pi)^{-1}(\hat{f}*\hat{g})(\xi)$
3. $\widehat{e^{-ax^2/2}}(\xi) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^{-\xi^2/(2a)}$
4. Bessel funktionen

$$J_n(x) = \sum_{k\ge 0}(-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{k!\Gamma(k+n+1)}$$