Fourieranalys MVE030 och Fourier Metoder MVE290 lp3 18.mars.2016
Betygsgränser: 3: 40 poäng, 4: 50 poäng, 5: 60 poäng.
Maximalt antal poäng: 80.
Hjälpmedel: BETA och en typgodkänd räknedosa.
Examinator: Julie Rowlett.
Telefonvakt: Carl Lundholm 031-772 5325.

1. Bevisa Samplingsatsen: Låt $f \in L^2(\mathbb{R})$ och låt $\hat{f}$ vara Fouriertransformen av f. Antag att det finns $L > 0$ sådant $\hat{f}(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ med $|x| > L$. Visa att
$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n\pi}{L}\right)\frac{\sin(n\pi - tL)}{n\pi - tL}.$$
(10 p)

2. Låt f vara en 2π-periodisk funktion med $f \in C^2(\mathbb{R})$. Bevisa att Fourierkoefficienterna c_n av f och Fourierkoefficienterna c_n' av f' uppfyller
$$c_n' = inc_n.$$
(10 p)

3. Lös
$$u_t = u_{xx}, \quad t > 0,\ x \in (0, \pi),$$
$$u(0, x) = \pi x - x^2, \quad u(t, 0) = u(t, \pi) = 0.$$
(10 p)

4. Lös
$$u_t = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$
$$u(0, x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$
(10 p)

5. Lös
$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$
$$u(0, x) = 0, \quad u_t(0, x) = 0,$$
$$u(t, 0) = (1 + t)^{3/2}.$$
(10 p)

6. Legendrepolynomen

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad n \geq 0,$$

är en ortogonal bas på $L^2([-1,1])$ med

$$||P_n||_{L^2}^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

Antag att f är kontinuerlig på $(-2,2)$, beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx.$$

(10 p)

7. Hitta det polynom av högst grad 2 som minimerar

$$\int_{-1}^{1} |\sin(\pi x) - p(x)|^2 dx.$$

(10 p)

8. Låt H vara halvskivan

$$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, \quad x^2+y^2 \leq 1\}.$$

Hitta alla $\lambda > 0$ och funktioner $f \not\equiv 0$ sådana att det i polära koordinater (r,θ) gäller att

$$\begin{cases} f_{rr} + r^{-1}f_r + r^{-2}f_{\theta\theta} = -\lambda f & \text{på } H \text{, och} \\ f = 0 & \text{på } \partial H. \end{cases}$$

(10 p)

Formler:

1. $\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$
2. $\widehat{fg}(\xi) = (2\pi)^{-1}(\hat{f} * \hat{g})(\xi)$
3. $\widehat{e^{-ax^2/2}}(\xi) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^{-\xi^2/(2a)}$
4. $\mathcal{L}\left(H(t-a)f(t-a)(z)\right) = e^{-az}\mathcal{L}(f(z))$, där H är Heavysidefunktionen.
5. Bessels ekvation av ordning n: $x^2f'' + xf' + (x^2-n^2)f = 0$.