Matematiska vetenskaper
Chalmers & GU
2014

Ortogonalsystem i L^2

Peter Sjögren

Dessa sidor är avsedda att ersätta Sections 3.3 och 3.4 i Follands bok *Fourier analysis and its applications*, med undantag av den dominerade konvergenssatsen på sidan 83.

1 Något om rummet L^2

I det följande skriver vi L^2 för $L^2(D)$, där D är något intervall på linjen, ofta hela $\mathbb{R}$, eller något område i $\mathbb{R}^m$. Funktionerna i L^2 kan vara antingen reell- eller komplexvärda.

Vi "definierar" L^2 som rummet av alla funktioner definierade i D sådana att

$$\int_D |f(x)|^2\,dx < \infty,$$

men detta är en förenkling av verkligheten. En korrekt definition kräver ett förfinat integralbegrepp, som vi inte går in på här.

Man inför skalärprodukt (= inre produkt) och norm i L^2 enligt

$$\langle f, g\rangle = \int_D f(x)\overline{g(x)}\,dx \quad \text{och} \quad \|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \left(\int_D |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Här är $\overline{g(x)}$ komplexkonjugatet av $g(x)$, så i det reellvärda fallet har strecket ingen effekt. Som i linjär algebra visar man Cauchy-Schwarz olikhet

$$|\langle f, g\rangle| \le \|f\|\,\|g\|$$

och triangelolikheten

$$\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|.$$

Om en funktion $f \in L^2$ är så liten att $\|f\| = 0$, betraktar vi f som nollfunktionen och skriver $f = 0$, eller för tydlighetens skull $f = 0$ i L^2-mening. Man kan visa att detta innebär att $f(x) = 0$ utom då x tillhör en mängd som i en viss mening är mycket liten.

Anm. Formellt blir detta korrekt genom att man betraktar f och g som samma L^2-funktion så snart $\|f - g\| = 0$. Så egentligen består L^2 inte av funktioner utan av mängder, kallade ekvivalensklasser, av funktioner, där ekvivalensrelationen ges av $\|f - g\| = 0$.

Vi betraktar $\|f - h\|$ som *avståndet* mellan två funktioner $f, h \in L^2$. En följd $(f_j)_1^\infty$ i L^2 säges *konvergera i* L^2 eller *i* L^2*-mening* mot $f \in L^2$ om $\|f_j - f\| \to 0$ då $j \to \infty$.

Två grundläggande egenskaper hos L^2 måste vi ge utan bevis, i brist på en korrekt definition. En L^2-funktion kan vara ganska oregelbunden, exempelvis obegränsad och diskontinuerlig, men den kan alltid *approximeras* med "snällare" funktioner. Mera precis kan man för varje $f \in L^2$ hitta en funktion $g \in L^2$ som är kontinuerlig, och dessutom har kontinuerliga derivator av godtyckligt hög ordning, sådan att $\|f - g\|$ är mindre än ett föreskrivet $\varepsilon > 0$. En ytterligare finess är att g kan väljas som 0 utanför en begränsad och sluten delmängd av D.

Den andra egenskapen är att L^2 är *fullständigt*. Det betyder att varje Cauchyföljd konvergerar. Med en Cauchyföljd menar vi en följd $(f_j)_1^\infty$ i L^2 sådan att $\|f_j - f_k\| \to 0$ då $j,\ k \to \infty$.

Tillsammans säger dessa två egenskaper väsentligen att man kommer fram till L^2 genom att utgå från "snälla" funktioner och lägga till allt som behövs för att få ett fullständigt rum, men inte mer. Konstruktionen är analog med utvidgningen från $\mathbb{Q}$ till $\mathbb{R}$.

Den bärande idén i det följande är ett geometriskt synsätt på L^2, som ju är ett vektorrum med reella eller komplexa tal som skalärer. Det nya jämfört med linjär algebra är att rummet har oändlig dimension. Pythagoras sats gäller även här: om f och g är ortogonala vektorer, dvs. $\langle f, g \rangle = 0$, är

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

Detta visar man lätt genom att utveckla skalärprodukten $\langle f + g, f + g \rangle$.

Man använder ofta en variant av L^2. Om w är en kontinuerlig, positiv funktion i D, definierar man det det *viktade* L^2-rummet L^2_w bestående av alla funktioner f som uppfyller

$$\int_D |f(x)|^2 w(x)\, dx < \infty.$$

Då ges skalärprodukten och normen av

$$\langle f, g\rangle_w = \int_D f(x)\overline{g(x)}w(x)\,dx \quad \text{och} \quad \|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle_w}.$$

I stort sett allt i denna text gäller även för L^2_w, fast ortogonalsystemen blir förstås inte desamma.

2 Ortogonalsystem

I den linjära algebran inför man ofta en ortogonal- eller ortonormalbas, då rummet är försett med en skalärprodukt. För att hitta något motsvarande i L^2 måste vi ta till en oändlig följd.

Definition. *En följd $(\phi_n)_1^\infty$ av L^2-funktioner är ett ortogonalsystem i L^2 om $\langle\phi_n, \phi_{n'}\rangle = 0$ för $n \neq n'$ och ingen ϕ_n är 0 i L^2-mening.*

Två exempel på ortogonalsystem i $L^2(-\pi, \pi)$ är

$$\{e^{inx},\ n \in \mathbf{Z}\} \qquad \text{och} \qquad \{\cos nx,\ n = 0, 1, 2, ...\} \cup \{\sin nx,\ n = 1, 2, ...\}.$$

I $L^2(0, \pi)$ är både

$$\{\cos nx,\ n = 0, 1, 2, ...\} \qquad \text{och} \qquad \{\sin nx,\ n = 1, 2, ...\}$$

ortogonalsystem; detta visas i cosinusfallet i Folland, sidan 70, och sinusfallet är analogt.

För ändliga linjärkombinationer av vektorerna i ett ortogonalsystem ger upprepad användning av Pythagoras sats att

$$\|\sum_1^N d_n\phi_n\|^2 = \sum_1^N |d_n|^2\|\phi_n\|^2,$$

där d_n är skalärer.

Givet ett ortogonalsystem vill man utveckla en godtycklig L^2-funktion f i en serie

$$f = \sum_1^\infty c_n\phi_n,$$

där vi söker skalärerna c_n. I våra exempel blir detta en Fourierserie, och man brukar tala om Fourierserier även i det allmänna fallet.

För att gissa vad c_n bör vara, utgår från denna ekvation, skalärmultiplicerar båda leden med ϕ_k och chansar på att man kan ta skalärprodukterna termvis i högerledet. På grund av ortogonaliteten blir det då bara en term kvar i högerledet, nämligen den med $n = k$. Vi skulle få

$$\langle f, \phi_k \rangle = c_k \langle \phi_k, \phi_k \rangle.$$

Här byter vi ut k mot n och kommer ihåg att $\langle \phi_n, \phi_n \rangle = \|\phi_n\|^2 \neq 0$. Då får vi

$$c_n = \frac{1}{\|\phi_n\|^2} \langle f, \phi_n \rangle = c_n(f),$$

där den sista likheten är en definition av $c_n(f)$. Vi kommer att se att detta är rätt val av koefficienter för f.

Anm. Man kan välja att normera alla ϕ_n, dvs. ge dem norm 1. Det man får då kallas förstås ett orto*normal*system, och formeln för $c_n(f)$ stämmer nu med den för ortonormalbaser i linjär algebra. Men man brukar inte normera de ortogonalsystem vi sysslar med.

Vi skall först se att $c_n(f)$ är det bästa valet av koefficienter då man bara får använda ändligt många ϕ_n. För ett (stort) naturligt tal N låter vi H_N vara det delrum av L^2 som spänns upp av $\phi_1, \cdots, \phi_N$. Vi vill bestämma koefficienter d_n så att $\sum_1^N d_n \phi_n$ blir en så bra approximation av f som möjligt. Detta mäter vi med normen $\|f - \sum_1^N d_n \phi_n\|$.

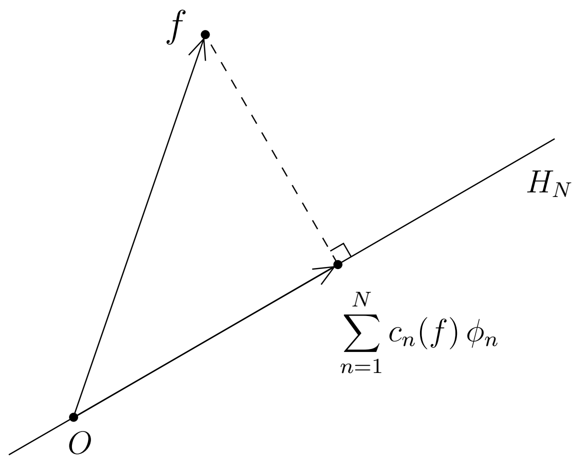
Sats. ***(Satsen om bästa approximation, Theorem 3.8 i Folland)*** *Om $f \in L^2$, är $\sum_1^N c_n(f) \phi_n$ den punkt i H_N som ligger närmst f, dvs.*

$$\min \|f - \sum_1^N d_n \phi_n\| = \|f - \sum_1^N c_n(f) \phi_n\|,$$

där minimum tas över alla skalärer $d_1, \cdots, d_N$.

Anm. Observera att denna sats utspelas i ett vektorrum av ändlig dimension, nämligen det delrum av L^2 som spänns upp av f och $\phi_1, \cdots, \phi_N$. Därför följer den av satsen med samma namn från den linjära algebran. Vi ger ändå ett bevis, eftersom det belyser innebörden och eftersom vi kommer att ha nytta av en formel i beviset.

Bevis. Om vi väljer $d_n = c_n(f)$ för alla n, blir normen i vänsterledet lika med högerledet, så det återstår bara att visa att den aldrig blir mindre än högerledet.



Observera att vektorn $f - \sum_1^N c_n(f)\phi_n$ är ortogonal mot varje ϕ_k, $1 \leq k \leq N$, eftersom

$$\langle f - \sum_1^N c_n(f)\phi_n, \phi_k\rangle = \langle f, \phi_k\rangle - c_k(f)\langle \phi_k, \phi_k\rangle = 0,$$

det sista enligt definitionen av $c_k(f)$. Den är därmed också ortogonal mot varje vektor i H_N. Se figuren.

Nu skriver vi

$$f - \sum_1^N d_n\phi_n = \left(f - \sum_1^N c_n(f)\phi_n\right) + \sum_1^N (c_n(f) - d_n)\phi_n,$$

och observerar att av de två termerna i det här högerledet ligger den andra i H_N, och den är därför ortogonal mot den första termen. Då ger Pythagoras sats

$$\|f - \sum_1^N d_n\phi_n\|^2 = \|f - \sum_1^N c_n(f)\phi_n\|^2 + \sum_1^N |c_n(f) - d_n|^2\|\phi_n\|^2. \quad (1)$$

Eftersom den sista termen här aldrig är negativ, ser vi att

$$\|f - \sum_1^N d_n\phi_n\|^2 \geq \|f - \sum_1^N c_n(f)\phi_n\|^2.$$

Detta säger att normen i vänsterledet i satsens formulering alltid är minst lika stor som högerledet. Satsen följer.

□

Som framgår av figuren betyder ortogonaliteten vi fann i detta bevis att $\sum_1^N c_n(f)\phi_n$ är ortogonalprojektionen av f på delrummet H_N, och därmed också den "närmsta punkten".

Observera också att satsen kan användas så snart man har ett linjärt delrum $H \subset L^2$ av ändlig dimension N. Då kan man nämligen finna ett ortogonalsystem $(\phi_n)_{n=1}^N$ i H, och några fler ϕ_n behövs inte.

Beviset ger ytterligare resultat. Om man väljer alla $d_n = 0$ i (1), får man

$$\|f\|^2 - \sum_1^N |c_n(f)|^2 \|\phi_n\|^2 = \|f - \sum_1^N c_n(f)\phi_n\|^2 \geq 0, \tag{2}$$

där den sista olikheten är uppenbar. Den medför att

$$\sum_1^N |c_n(f)|^2 \|\phi_n\|^2 \leq \|f\|^2.$$

Här kan vi låta $N \to \infty$ och få följande olikhet.

Sats. ***(Bessels olikhet)***

$$\sum_1^\infty |c_n(f)|^2 \|\phi_n\|^2 \leq \|f\|^2.$$

Vi skall nu se att denna olikhet medför att serien $\sum_1^\infty c_n(f)\phi_n$ konvergerar i L^2. Betrakta en allmän serie $\sum_1^\infty d_n\phi_n$. Att denna konvergerar innebär att dess partialsummor $\sum_1^N d_n\phi_n$ konvergerar då $N \to \infty$, i L^2-mening.

Lemma. *Om $\sum_1^\infty |d_n|^2 \|\phi_n\|^2 < \infty$, så konvergerar serien $\sum_1^\infty d_n\phi_n$ i L^2-mening.*

Bevis. Partialsummorna bildar en Cauchyföljd, eftersom för $N' < N$

$$\|\sum_1^N d_n\phi_n - \sum_1^{N'} d_n\phi_n\|^2 = \|\sum_{N'+1}^N d_n\phi_n\|^2 = \sum_{N'+1}^N |d_n|^2 \|\phi_n\|^2,$$

enligt Pythagoras sats, och den sista summan går mot 0 då $N, N' \to \infty$. Men i L^2 konvergerar Cauchyföljder. □

Enligt Bessels olikhet konvergerar därför serien $\sum_1^\infty c_n(f)\phi_n$. Vi vill veta om dess summa är f, vilket är detsamma som att $\|f - \sum_1^N c_n(f)\phi_n\| \to 0$ då $N \to \infty$. Genom att låta $N \to \infty$ i (2) ser vi att detta är sant om och endast om

$$\sum_1^\infty |c_n(f)|^2 \|\phi_n\|^2 = \|f\|^2,$$

dvs. likhet gäller i Bessels olikhet. För varje $f \in L^2$ har vi alltså ekvivalensen

$$\sum_1^\infty c_n(f)\phi_n = f \quad \Leftrightarrow \quad \sum_1^\infty |c_n(f)|^2 \|\phi_n\|^2 = \|f\|^2. \tag{3}$$

Nästa fråga blir om detta gäller för *alla* $f \in L^2$, så att alla L^2-funktioner kan serieutvecklas i ortogonalsystemet. Svaret gör vi till en definition.

3 Fullständiga ortogonalsystem

Definition. *Ortogonalsystemet* $(\phi_n)_1^\infty$ *kallas fullständigt, eller en bas, om* $\sum_1^\infty c_n(f)\phi_n = f$ *för alla* $f \in L^2$. *Serien skall alltså konvergera mot* f *i* L^2.

Här är som förut $c_n(f) = \frac{1}{\|\phi_n\|^2}\langle f, \phi_n\rangle$.

Följande sats säger att fullständighet kan beskrivas på flera sätt. Det bör kanske påpekas att ekvivalens här innebär att var och en av de tre utsagorna medför de andra två.

Sats. ***(Theorem 3.4 i Folland)*** *Låt* $(\phi_n)_1^\infty$ *vara ett ortogonalsystem i* L^2. *Följande är ekvivalent:*
(a) $(\phi_n)_1^\infty$ *är fullständigt;*
(b) $\sum_1^\infty |c_n(f)|^2\|\phi_n\|^2 = \|f\|^2$ *för alla* $f \in L^2$ ***(Parsevals ekvation);***
(c) om $f \in L^2$ *är ortogonal mot alla* ϕ_n, *så är* $f = 0$.

Bevis. Att (a) och (b) är ekvivalenta följer direkt av (3). För att se att (c) följer av (a) utgår vi från att (a) gäller och antar att $f \in L^2$ är ortogonal mot alla ϕ_n. Då är alla $c_n(f) = 0$, så i Fourierserien $\sum_1^\infty c_n(f)\phi_n$ är alla termer 0. Men på grund av (a) är summan av denna serie f så att $f = 0$, och (c) följer.

Slutligen visar vi att (c) medför (a). Tag en godtycklig $f \in L^2$. Vi vet redan att $\sum_1^\infty c_n(f)\phi_n$ konvergerar, enligt Bessels olikhet och lemmat ovan, så vi kan bilda skillnaden $f - \sum_1^\infty c_n(f)\phi_n$. Skalärprodukten av denna skillnad och ϕ_k blir $\langle f, \phi_k \rangle - c_k(f)\|\phi_k\|^2$, som är 0 enligt definitionen av $c_k(f)$. (För att här ta skalärprodukten termvis i summan utnyttjade vi skalärproduktens kontinuitet; se övning 3.3.1 i Folland.) Skillnaden är alltså ortogonal mot alla vektorer i ortogonalsystemet och därmed 0, eftersom vi utgår från (c). Detta visar att (a) följer av (c).

Därmed är det visat att de tre utsagorna är ekvivalenta. $\square$

Vi skall nu se att de ortogonalsystem man använder för Fourierserier är fullständiga. Satsen formuleras för intervallen $(-\pi, \pi)$ och $(0, \pi)$, men det följer genast att fullständighet också gäller för motsvarande baser i $(-\ell, \ell)$ och $(0, \ell)$.

Sats. ***(Theorem 3.5 i Folland)*** *Ortogonalsystemen*

$$\{e^{inx},\ n \in \mathbf{Z}\} \qquad \text{och} \qquad \{\cos nx,\ n = 0, 1, 2, ...\} \cup \{\sin nx,\ n = 1, 2, ...\}.$$

i $L^2(-\pi, \pi)$ *är fullständiga. Detsamma gäller för systemen*

$$\{\cos nx,\ n = 0, 1, 2, ...\} \qquad \text{och} \qquad \{\sin nx,\ n = 1, 2, ...\}$$

i $L^2(0, \pi)$.

Bevis. Ta $f \in L^2(I)$, där I är intervallet $(-\pi, \pi)$ eller $(0, \pi)$, och låt $\varepsilon > 0$. Då kan vi approximera f med en kontinuerligt deriverbar funktion g i I, så att $\|f - g\| < \varepsilon$. Vi kan också välja g så att $g = 0$ nära I:s ändpunkter. Då har g en fortsättning till en 2π-periodisk funktion $\tilde{g}$ på $\mathbb{R}$, som dessutom kan väljas jämn resp. udda i fallen med de två baserna i $(0, \pi)$. Utvidgningen $\tilde{g}$ blir då kontinuerligt deriverbar på hela $\mathbb{R}$. Sats 2.5 i Folland ger att Fourierserien $\sum_1^\infty c_n(g)\phi_n$ för $\tilde{g}$ konvergerar likformigt mot $\tilde{g}$. Här betecknar (ϕ_n) det av de fyra ortogonalsystemen som vi betraktar. Om N väljs stort nog, har man då att

$$|g - \sum_1^N c_n(g)\phi_n| < \varepsilon$$

överallt i I. Kvadrering och integration ger

$$\|g - \sum_1^N c_n(g)\phi_n\|^2 = \int_I |g(x) - \sum_1^N c_n(g)\phi_n(x)|^2 \, dx < 2\pi\, \varepsilon^2.$$

Med triangelolikheten får vi då

$$\|f - \sum_1^N c_n(g)\phi_n\| = \|f - g + g - \sum_1^N c_n(g)\phi_n\|$$
$$\leq \|f - g\| + \|g - \sum_1^N c_n(g)\phi_n\| < (1 + \sqrt{2\pi})\varepsilon.$$

Men nu följer det av satsen om bästa approximation med $d_n = c_n(g)$ att

$$\|f - \sum_1^N c_n(f)\phi_n\| \leq \|f - \sum_1^N c_n(g)\phi_n\| < (1 + \sqrt{2\pi})\varepsilon.$$

Eftersom ε är godtyckligt, betyder detta att Fourierserien för f konvergerar mot f i $L^2(I)$. Ortogonalsystemet (ϕ_n) är alltså fullständigt. $\square$

Det är lätt att ge exempel på ortogonalsystem som *inte* är fullständiga. Man kan ta systemet $\phi_n = \cos nx$, $n = 0, 1, 2, ...$, i $L^2(-\pi, \pi)$, alltså i "fel" intervall. Det är ortogonalt i $(-\pi, \pi)$, eftersom dessa funktioner är parvis ortogonala såväl i $(-\pi, 0)$ som i $(0, \pi)$. För att se att det inte är fullständigt i $(-\pi, \pi)$ räcker det att se att någon av de ekvivalenta utsagorna (a), (b) eller (c) inte är sann. Och eftersom alla ϕ_n är jämna funktioner, blir varje udda funktion i $L^2(-\pi, \pi)$ ortogonal mot alla ϕ_n, och därför gäller inte (c). Ofullständigheten följer.

Det finns ännu enklare exempel: om man i vilket ortogonalsystem som helst kastar bort en enda av basfunktionerna, säg ϕ_{n_0}, kommer alla de återstående ϕ_n att vara ortogonala mot ϕ_{n_0}. Genom att ta $f = \phi_{n_0}$ ser man därför att (c) inte är uppfyllt för det reducerade systemet, som alltså inte är fullständigt.

I vektorrum av *ändlig* dimension är ett ortogonalsystem fullständigt, dvs. en bas, om och endast om antalet vektorer är lika med rummets dimension. Men något motsvarande fungerar alltså inte i oändlig dimension.

4 Parsevals ekvation

För de fyra trigonometriska, fullständiga ortogonalsystemen i satsen ovan har man enligt (b) Parsevals ekvation, som ger ett samband mellan normen av en godtycklig L^2-funktion och dess Fourierkoefficienter. Hur Parsevals ekvation ser ut i dessa fyra fall kan man se på sidan 79 i Folland.

Genom ett enkelt variabelbyte flyttar man Fourierserierna från intervallen $(-\pi, \pi)$ och $(0, \pi)$ till $(-\ell, \ell)$ och $(0, \ell)$, för ett givet $\ell > 0$; se sidorna 46-47 i Folland. Man får då följande fyra typer av Fourierserier med motsvarande former av Parsevals ekvation:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/\ell}, \quad -\ell < x < \ell$$

med

$$\int_{-\ell}^{\ell} |f(x)|^2\, dx = 2\ell \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2;$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right), \quad -\ell < x < \ell$$

med

$$\int_{-\ell}^{\ell} |f(x)|^2\, dx = \frac{\ell}{2}|a_0|^2 + \ell \sum_{1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right);$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell}, \quad 0 < x < \ell$$

med

$$\int_{0}^{\ell} |f(x)|^2\, dx = \frac{\ell}{4}|a_0|^2 + \frac{\ell}{2} \sum_{1}^{\infty} |a_n|^2;$$

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad 0 < x < \ell$$

med

$$\int_{0}^{\ell} |f(x)|^2\, dx = \frac{\ell}{2} \sum_{1}^{\infty} |b_n|^2.$$

Dessa versioner av Parseval står inte i Follands bok. Men de två första fallen finns i BETA 13.1 sid 312, där man måste välja $T = 2\ell$ och $a = -\ell$.