Fourieranalys MVE030 och Fourier Metoder MVE290 17.mars.2017
Betygsgränser: 3: 40 poäng, 4: 53 poäng, 5: 67 poäng.
Maximalt antal poäng: 80.
Hjälpmedel: BETA.
Examinator: Julie Rowlett.
Telefonvakt: Fanny Berglund, 5325.

1. Bevisa att Bessel funktionerna, J_n, uppfyller:
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(x)z^n = e^{\frac{x}{2}(z-1/z)}.$$
(10 p)

2. Bevisa att Hermite polynomen, $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$, är ortogonala i Hilbert-rummet $L^2_w(\mathbb{R})$ med $w(x) = e^{-x^2}$.
(10 p)

3. Beräkna:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$
(Hint: Utveckla e^x i Fourier-series i intervallet $(-\pi, \pi)$). (10 p)

4. Hitta siffrorna a_0, a_1, och $a_2 \in \mathbb{C}$ som minimerar
$$\int_0^{\pi} |x - a_0 - a_1 \cos(x) - a_2 \cos(2x)|^2 dx.$$
(10 p)

5. Lös problemet:
$$u_t - u_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$u(x,0) = 20e^{-x^2}$$
(10 p)

6. Vi definerar
$$\widehat{LP_\alpha}(f) := \hat{f}\chi_{(-\alpha,\alpha)}.$$
Beräkna $LP_\alpha(f)$ med
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$
(10 p)

7. Lös problemet:

$$u_t - u_{xx} = tx, \quad 0 < x < 4, \quad t > 0,$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 20, \\ u(0,t) &= 20, \\ u_x(4,t) &= 0. \end{aligned}$$

(10 p)

8. Lös problemet:

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad x^2 + y^2 < 1 \text{ och } y > 0, \quad t > 0,$$

I polära koordinaterna (r, θ),

$$u_{tt} - u_{rr} - r^{-1}u_r - r^{-2}u_{\theta\theta} = 0, \quad 0 < r < 1, \text{ och } 0 < \theta < \pi,$$

med

$$\begin{aligned} u(1,\theta,t) &= \sin(2\theta), & & t > 0, \\ u(r,\theta,0) &= 0, & 0 < r < 1, \quad & 0 < \theta < \pi, \\ u_t(r,\theta,0) &= 0, & 0 < r < 1, \quad & 0 < \theta < \pi. \end{aligned}$$

(10 p)

Lycka till! May the force be with you! ♡ Julie Rowlett.