Fourieranalys MVE030 och Fourier Metoder MVE290 7.juni.2017
Betygsgränser: 3: 40 poäng, 4: 53 poäng, 5: 67 poäng.
Maximalt antal poäng: 80.
Hjälpmedel: BETA.
Examinator: Julie Rowlett.
Telefonvakt: Raad Salman 5325.

1. Låt $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vara en ortonormal mängd i ett Hilbert-rum, H. Om $f \in H$, bevisa att

$$||f - \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle f, \phi_n\rangle \phi_n|| \leq ||f - \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n\phi_n||, \quad \forall \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2,$$

och = gäller $\iff$ $c_n = \langle f, \phi_n\rangle$ gäller $\forall n \in \mathbb{N}$.

(10 p)

2. Bevisa att Hermite polynomen, $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$, uppfyller $\forall x \in \mathbb{R}$ och $z \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{z^n}{n!} = e^{2xz - z^2}.$$

(10 p)

3. Beräkna:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

(Hint: Utveckla e^x i Fourier-series i intervallet $(-\pi, \pi)$). (10 p)

4. Hitta siffrorna a_0, a_1, och $a_2 \in \mathbb{C}$ som minimerar

$$\int_0^{\pi} |e^x - a_0 - a_1 \cos(x) - a_2 \cos(2x)|^2 dx.$$

(10 p)

5. Lös problemet:

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$u(x, 0) = e^{-|x|}$$

(10 p)

6. Låt $\alpha > 0$. Vi definerar

$$\widehat{LP_\alpha}(f)(\xi) := \hat{f}(\xi)\chi_{(-\alpha,\alpha)}(\xi).$$

Vi definerar

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx, \quad \chi_{(-\alpha,\alpha)}(\xi) = \begin{cases} 1 & |\xi| < \alpha \\ 0 & |\xi| \geq \alpha \end{cases}$$

Beräkna $LP_\alpha(f)$ med

$$f(x) = e^{-|x|}.$$

(10 p)

7. Lös problemet:

$$u_{tt} - u_{xx} = tx, \quad 0 < x < 4, \quad t \geq 0,$$

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 20, \\ u_x(4,t) &= 0, \\ u(x,0) &= 20, \\ u_t(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

(10 p)

8. Lös problemet:

$$u_t - u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad -1 \leq x, y \leq 1, \quad t \geq 0,$$

med

$$\begin{aligned} u(-1,y,t) &= 25, \\ u(1,y,t) &= 25, \\ u(x,-1,t) &= 25, \\ u(x,1,t) &= 25, \\ u(x,y,0) &= (6-|x|)(6-|y|). \end{aligned}$$

(10 p)

Lycka till! May the force be with you! ♡ Julie Rowlett.