

Fourieranalys MVE030 och Fourier Metoder MVE290 22.augusti.2017

Betygsgränser: 3: 40 poäng, 4: 53 poäng, 5: 67 poäng.

Maximalt antal poäng: 80.

Hjälpmedel: BETA.

Examinator: Julie Rowlett.

Telefonvakt: Raad Salman 5325.

1. (10 p) Låt f vara en 2π periodisk funktion. Antar att f är styvvis kontinuerlig (piecewise continuous) och att $\forall x \in \mathbb{R}$, dess höger och vänster gränsvärde existerar:

$$\lim_{y \rightarrow x^+} f(y) = f(x_+) \in \mathbb{R}, \quad \lim_{y \rightarrow x^-} f(y) = f(x_-) \in \mathbb{R}.$$

Låt

$$S_N(x) = \sum_{-N}^N c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Bevisa att gäller:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \frac{1}{2} (f(x_-) + f(x_+)), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. (10 p) Definerar Fourier transformen och ger dess Inversion-Formel.
3. (10 p) Beräkna:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 + n^2}.$$

(Hint: Utveckla e^{2x} i Fourier-series i intervallet $(-\pi, \pi)$).

4. (10 p) Hitta siffrorna a_0 , a_1 , och $a_2 \in \mathbb{C}$ som minimerar

$$\int_0^{\pi} |\sin(x) - a_0 - a_1 \cos(x) - a_2 \cos(2x)|^2 dx.$$

5. (10 p) Lös problemet:

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$u(x, 0) = e^{-x^2}$$

6. (10 p) Beräkna

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{xe^x} dx.$$

7. (10 p) Lös problemet:

$$u_{xx} + u_{yy} = -20u, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(0, y) = u(1, y) = 0,$$

$$u(x, 0) = 0,$$

$$u(x, 1) = x^2 - x.$$

8. (10 p) Lös problemet:

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = t + 1,$$

$$u(1, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = 1 - x.$$

Lycka till! May the force be with you! ♡ Julie Rowlett.