4.2.5 Lös ekvationen

$$\begin{cases} u_t = k\cdot u_{xx} + e^{-2t}\sin x \\ u(x,0) = u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

Lösning: Vi letar först efter en lösning till den homogena ekvationen

$$w_t = k\cdot u_{xx} \qquad (*)$$

Om vi antar att en separabel lösning finns kan vi sätta $v(x,t) = X(x)T(t)$ och får

$$\begin{cases} v_t = X(x)T'(t) \\ v_{xx} = X''(x)T(t) \end{cases} \overset{(*)}{\Rightarrow} X(x)T'(t) = kX''(x)T(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{kX''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}$$

Eftersom att VL och HL är uttryck i olika variabler måste de båda vara lika med någon konstant C.

$$\Rightarrow \begin{cases} X''(x) = CX(x) \\ T'(t) = CkT(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T(t) = ae^{Ckt} \\ X(x) = \begin{cases} a_0 x + b_0 & \text{om } C = 0 \\ a_1 e^{\sqrt{C}x} + b_1 e^{-\sqrt{C}x} & \text{om } C > 0 \\ a_2 \cos\sqrt{|C|}x + b_2 \sin\sqrt{|C|}x & \text{om } C < 0 \end{cases} \end{cases}$$

[Ofta antas i boken att $a_0 = a_1 = b_1 = 0$ då detta inte antas ge fysikaliskt rimliga lösningar.]

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

$$\Rightarrow v(0,t) = v(\pi,t) = 0$$

$$\begin{cases} v(0,t) = X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \\ v(\pi,t) = X(\pi)T(t) = 0 \Rightarrow X(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = b_0 = 0, \\ a_1 = b_1 = 0 \\ a_2 = 0, \quad \sqrt{|C|} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Gissning: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin nx$

[$\begin{cases} \sin nx = -\sin -nx & \Rightarrow \text{behöver ej neg. } n \\ \sin 0x = 0 & \Rightarrow \text{behöver ej } n=0 \end{cases}$]

Vi sätter in vår gissning i vår ursprungliga ekvation: $u_t = k u_{xx} + e^{-2t} \sin x$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t) \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} -kn^2 b_n(t) \sin nx + e^{-2t} \sin x$$

[Då $(\sin nx)$ är en ortogonalbas på $(0,\pi)$ och vi får samma koefficienter får vi]

$$\begin{cases} b_n'(t) = -kn^2 b_n(t) & \text{då } n \neq 1 \\ b_1'(t) = -k b_1(t) + e^{-2t} \end{cases}$$

$$u(x,0) = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0) \sin nx = 0 \quad \forall x \Rightarrow b_n(0) = 0 \quad \forall n$$

$$n \neq 1 \Rightarrow b_n(t) = C_n e^{-kn^2 t}$$

$$b_n(0) = 0 \Rightarrow C_n = 0 \Rightarrow b_n(t) = 0.$$

$$n = 1 \xrightarrow{\text{integrerande faktor}} b_1(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-2t} + C}{k-2} & \text{då } k \neq 2 \\[2mm] \dfrac{t+D}{e^{2t}} & \text{då } k = 2 \end{cases}$$

$$b_1(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} C = -1 \\ D = 0 \end{cases}$$

$\therefore$ En lösning ges av

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-2t} - 1}{k-2} \sin x & \text{då } k \neq 2 \\[2mm] t e^{-2t} \sin x & \text{då } k = 2 \end{cases}.$$

EÖ 23 Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till Sturm - Liouville - problemet

$$\begin{cases} f'' + \lambda f = 0 \quad , \quad x \in (0, a) \\ f(0) - f'(0) = 0 , \\ f(a) + 2f'(a) = 0 \end{cases}$$

Lösning: Vi delar upp i fallen $\lambda = 0$, $\lambda = \mu^2 > 0$ och $\lambda = -\mu^2 < 0$.

$\underline{\lambda = 0}$: $\quad f'' = 0 \Rightarrow f(x) = Ax + B$

$$\begin{cases} f(0) - f'(0) = B - A = 0 \Rightarrow A = B \\ f(a) + 2f'(a) = Aa + B + 2A = Aa + A + 2A = 0 \Rightarrow A = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x) = 0$

$\underline{\lambda = -\mu^2 < 0}$: $\quad f'' = \mu^2 f \Rightarrow f(x) = A\cosh(\mu x) + B\sinh(\mu x)$

$f(0) - f'(0) = (A + 0) - (0 + B) = A - B = 0 \Rightarrow A = B$

$\Rightarrow f(x) = A(\cosh(\mu x) + \sinh(\mu x)) = Ae^{\mu x}$

$\Rightarrow f(a) + 2f'(a) = Ae^{\mu x} + 2A\mu e^{\mu x} = A(1 + 2\mu)e^{\mu x} = 0$

$\Rightarrow A = 0$ or $\mu = -1/2$

$\Rightarrow$ Får ett egenvärde $\lambda = -(-1/2)^2 = -1/4$, med motsvarande egenvektor $f(x) = e^{-x/4}$.

$\underline{\lambda = \mu^2 > 0:}$ $\quad f'' = -\mu^2 f \Rightarrow f(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x$

$$f(0) - f'(0) = C_1 - \mu C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = \mu C_2$$

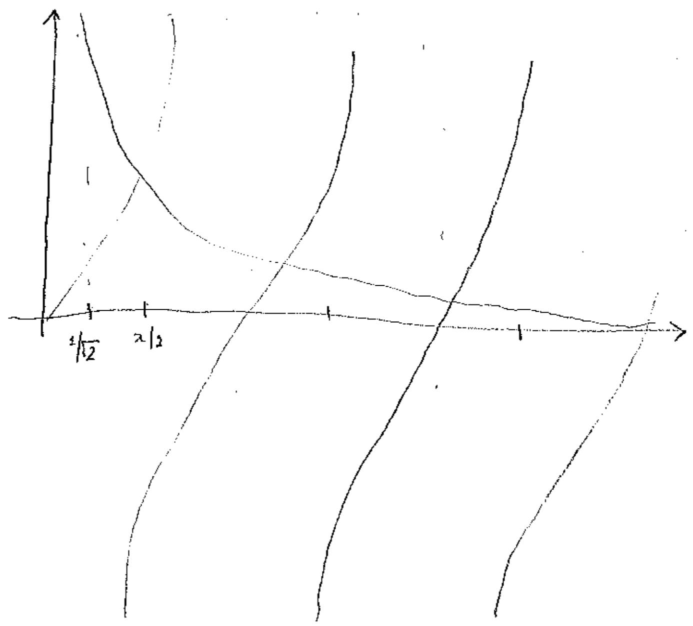
$$\begin{aligned} f(a) + 2f'(a) &= C_1 \cos \mu a + C_2 \sin \mu a + 2\mu (C_2 \cos \mu a - C_1 \sin \mu a) \\ &= (C_1 + 2\mu C_2) \cos \mu a + (C_2 - 2\mu C_1) \sin \mu a \\ &= 3\mu C_2 \cos \mu a + (1 - 2\mu^2) C_2 \sin \mu a = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow C_2 = 0$ or $3\mu \cos \mu a + (1 - 2\mu^2) \sin \mu a = 0$

$\Leftrightarrow \tan \mu a = \dfrac{3\mu}{2\mu^2 - 1}$

$\Rightarrow$ Om vi låter $\{\mu_k\}$ vara de positiva lösningar till ekvationen ovan får vi egenvärden $\lambda_k = \mu_k^2$ med motsvarande egenfunktioner $f_k(x) = \mu_k \cos \mu_k x + \sin \mu_k x$.

Finns sådana lösningar?



$\Rightarrow$ oändligt många positiva lösningar.

Är operatorn D^2 symmetrisk? (Oklart om följer direkt av lösningarnas form bq μ_k ej bestämt.)

$$\langle D^2 f, g \rangle = \int_0^a D^2 f(x) g(x)\,dx = [Df(x) g(x)]_0^a - \int Df(x) Dg(x)\,dx$$

$$= [Df(x)g(x) - f(x)Dg(x)]_0^a + \int f(x) D^2 g(x)\,dx$$

$$= [f'(x)g(x) - f(x)g'(x)]_0^a + \langle f, D^2 g \rangle$$

$$f'(a)g(a) - f(a)g'(a) - f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = -\frac{f(a)}{2} g(a) + f(a) \frac{g(a)}{2} - f(0)g(0) + f(0)g(0) = 0$$

$\Rightarrow D^2$ är symmetrisk $\Rightarrow$ egenvektorer ortogonala

EÖ24 Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till Sturm-Liouville-problemet

$$\begin{cases} -e^{-4x}\dfrac{d}{dx}\left(e^{4x}\dfrac{du}{dx}\right) = \lambda u, & x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases}$$

Utveckla funktionen e^{-2x} i en Fourierserie map. egenfunktionerna.

Lösning: Ekvationen ovan kan skrivas om som

$$-e^{-4x}\frac{d}{dx}\left(e^{4x}\frac{du}{dx}\right) = -e^{-4x}\left(4e^{4x}u_x + e^{4x}u_{xx}\right)$$

$$= -\left(4u_x + u_{xx}\right) = \lambda u$$

$$\Leftrightarrow \quad u_{xx} + 4u_x - \lambda u = 0$$

Den karakteristiska ekvationen ges av

$$r^2 + 4r - \lambda = (r+2)^2 - 4 - \lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad r = -2 \pm \sqrt{4+\lambda}.$$

Vi delar nu upp i tre fall:

$\underline{\lambda = -4}$: $r = -2 \Rightarrow u(x) = (ax+b)e^{-2x}$

$u(0) = b = 0 \Rightarrow b = 0$

$u'(1) = ae^{-2} - 2ae^{-2} = ae^{-2}(1-2) = -ae^{-2} = 0$

$\Rightarrow a = 0$

$\Rightarrow$ Inga egenvärden.

$\underline{\lambda > -4}$: (Två reella rötter) Sätt $\beta = \sqrt{4+\lambda}$ så att

$u(x) = e^{-2x}\left(C_1 \cosh \beta x + C_2 \sinh \beta x\right)$ (alt. ny form!!)

$u(0) = C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$, $u(x) = C_2 e^{-2x} \sinh \beta x$

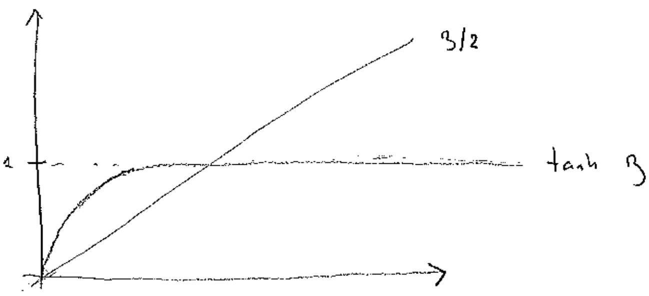
$u'(1) = e^{-2}\left(\cancel{C_1 \beta \sinh \beta} + C_2 \beta \cosh \beta\right)$

$\qquad - 2e^{-2x}\left(\cancel{C_1 \cosh \beta} + C_2 \sinh \beta\right)$

$\quad = C_2 e^{-2}\left(\beta \cosh \beta - 2 \sinh \beta\right) = 0$

$C_2 \neq 0$

$\Rightarrow \tanh \beta = \beta / 2$



$\Rightarrow$ Finns exakt en positiv lösning β_1

$\Rightarrow$ Får egenvärdet $\lambda_1 = 4 - \beta_1^2$ med egenfunktion
$u_1(x) = e^{-2x} \sinh \beta_1 x$.

$\underline{\lambda < -4}$: Sätt $\beta = \sqrt{|4+\lambda|}$ så att vi får lösningen

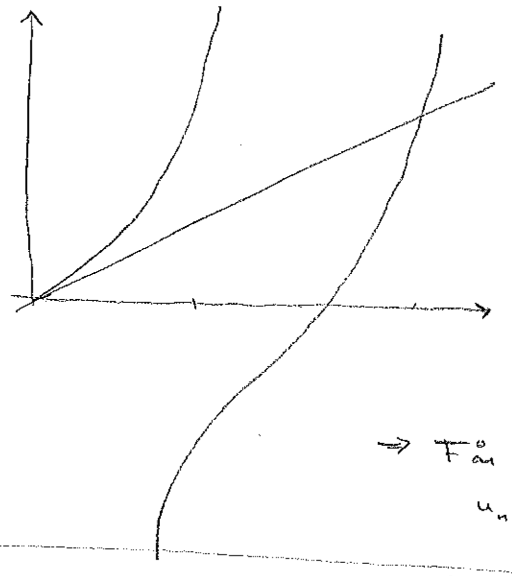
$u(x) = e^{-2x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$

$u(0) = C_1 e^{-2x} = 0 \Rightarrow C_1 = 0, \quad u(x) = C_2 e^{-2x} \sin \beta x$

$u'(1) = -2 C_2 e^{-2} \sin \beta + C_2 e^{-2} \beta \cos \beta$

$= C_2 e^{-2}\left(\beta \cos \beta - 2 \sin \beta\right) = 0$

$\overset{C_2 \neq 0}{\Rightarrow} \quad \tan \beta = \beta / 2$



$\Rightarrow$ oändligt många positiva rötter $\beta_2, \beta_3, \ldots$

$\Rightarrow$ Får egenvärden $\lambda_n = 4 - \beta_n^2 \quad (n \geq 2)$
$u_n(x) = e^{-2x} \sin(\beta_n x)$.

Ortogonala i Operatorn är $(u \mapsto u_{xx} + 4u_x)$ u. Genom på viktfunktion e^{4x} dy (sin x) vanlig ortogonalbas och $w(x) = 1$ fungerar ej.

$\int (f_{xx} + 4f_x) g e^{4x} \, dx \overset{PI}{=} \left[f_x g e^{4x}\right] - \int f_x \left(g_x e^{4x} + \cancel{4g e^{4x}}\right) dx + \int \cancel{4 f_x g e^{4x}} \, dx$

$= \left[f_x g e^{4x}\right] - \left[f g_x e^{4x}\right] + \int f \left(g_{xx} e^{4x} + 4 g_x e^{4x}\right) dx$

$= \underbrace{\left[(f_x g - f g_x) e^{4x}\right]_0^1}_{} + \int f (g_{xx} + 4 g_x) e^{4x} \, dx$

$\begin{cases} f(0) = g(0) = 0 \\ f'(1) = g'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \int = 0 \quad \Rightarrow$ operator symmetrisk

(Ty $d_{xx} + 4d_x$ är en symmetrisk operator!!)

b) Egenvektorerna (u_n) är ortogonala på intervallet $(0,1)$ med viktfunktionen $w(x) = e^{4x}$, så för att utveckla $f(x)$ som en Fourierserie i (u_n) sätter vi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, u_n(x) \quad \text{där}$$

$$c_n = \frac{\int_0^1 f_n(x) \, u_n(x) \, e^{4x} \, dx}{\int_0^1 u_n(x)^2 \, e^{4x} \, dx}$$

$$\int_0^1 u_1(x)^2 e^{4x} \, dx = \int_0^1 \sinh^2(B_1 x) \, dx = [\ldots] = \frac{2 - \lambda_1}{2\lambda_1}$$

$$n \geq 2 \Rightarrow \int_0^1 u_n(x)^2 e^{4x} \, dx = [\ldots] = \frac{\lambda_n - 2}{2\lambda_n}$$

$$c_1 = [\ldots] = \frac{2\sqrt{\lambda_1}\,(2 - \sqrt{\lambda_1})}{B_1 (2 - \lambda_1)}$$

$$n \geq 2 \Rightarrow c_n = \frac{2\sqrt{\lambda_n}\left(\sqrt{\lambda_n} + 2(-1)^n\right)}{B_n (\lambda_n - 2)} \qquad \text{(samma uttryck!!)}$$

$$\Rightarrow e^{-2x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{\lambda_n}\left(\sqrt{\lambda_n} + 2(-1)^n\right)}{B_n (\lambda_n - 2)} \, u_n(x).$$

Kommentar om egenvärden och ortogonalitet.

Linjär algebra: $\begin{cases} Av = \lambda v \\ Au = \mu u \end{cases}$, ~~u, v symmetriska~~ A symmetrisk / själv-adjungerande

$$\Rightarrow \mu u \cdot v = Au \cdot v = (A\bar{u})^T v = u^T A^T v = u^T A v$$
$$= u \cdot Av = u \cdot \lambda v = \lambda u \cdot v$$

$$\Rightarrow \lambda = \mu \text{ el. } u \cdot v = 0$$

(för mer, se avsnitt 3.5, men det här är poängen, och lättare att komma ihåg)

L^2: För Sturm-Liouville problem finns särskild sats i både Folland och Beta (sid 261): som ger särskilda villkor, men oftast bättre att bara testa.