Fourieranalys MVE030 och Fourier Metoder MVE290 16.mars.2018
Betygsgränser: 3: 40 poäng, 4: 53 poäng, 5: 67 poäng.
Maximalt antal poäng: 80.
Hjälpmedel: BETA.
Examinator: Julie Rowlett.
Telefonvakt: Olof Gieselsson, ankn 5325.

1. Bevisa att Besselfunktionerna, J_n, uppfyller:
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(x)z^n = e^{\frac{x}{2}(z-1/z)}.$$
(10 p)

2. Bevisa att de Hermitska polynomen,
$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},$$
uppfyller:
$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{z^n}{n!} = e^{2xz-z^2}.$$
(10 p)

3. Beräkna den komplexa Fourierserien till den 2π-periodiska funktion $f(x)$ som är lika med e^{-x} i $(-\pi, \pi)$. Vad är seriens summa i punkten 3π? (10 p)

4. Hitta polynomet, p, av högst grad tre som minimera
$$\int_{-3}^{3} |\cosh(x) - p(x)|^2 dx.$$
(10 p)

5. Lös problemet:
$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 20, \quad 0 < x < 4, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= v(x), \\ u(0,t) &= 0, \\ u_t(x,0) &= 0, \\ u_x(4,t) &= 0. \end{aligned}$$
(10 p)

6. Lös problemet:

$$u_t - u_{xx} = G(x,t), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$u(x,0) = v(x).$$

(10 p)

7. Lös problemet:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \quad x \in (0,\infty), \quad t \in (0,\infty) \\ u(0,t) = f(t) \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

(10 p)

8. Låt

$$I_0(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2}.$$

Visa att:

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x\cos(\theta)} d\theta.$$

(Tips: Taylorutvecklingen av exponentialfunktionen och beräkna $\int_0^{\pi} cos^n(\theta) d\theta$.)
(10 p)

Lycka till! May the force be with you! ♡ Julie Rowlett.