Fourieranalys MVE030 och Fourier Metoder MVE290 28.augusti.2018
Betygsgränser: 3: 40 poäng, 4: 53 poäng, 5: 67 poäng.
Maximalt antal poäng: 80.
Hjälpmedel: BETA.
Examinator: Julie Rowlett.
Telefonvakt: Mattias Lennartsson 5325

1. Låt $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vara en ortonormal mängd i ett Hilbert-rum, H. Om $f \in H$, bevisa att gäller:

$$||f - \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n|| \le ||f - \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \phi_n||, \quad \forall \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2,$$

   och $=$ gäller $\iff$ $c_n = \langle f, \phi_n \rangle$ gäller $\forall n \in \mathbb{N}$. (10 p)

2. Låt $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vara ortonormala i ett Hilbert-rum, H. Bevisa att följande tre är ekvivalenta:

$$(1) \quad f \in H \text{ och } \langle f, \phi_n \rangle = 0 \forall n \in \mathbb{N} \implies f = 0.$$

$$(2) \quad f \in H \implies f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n.$$

$$(3) \quad ||f||^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 .$$

   (10 p)

3. Beräkna den komplexa Fourierserien till den 2π-periodiska funktion $f(x)$ som är lika med x^3 i $(-\pi, \pi)$. Vad är seriens summa i punkten 8π? (10 p)

4. Hitta polynomet, p, av högst grad två som minimera

$$\int_{-2}^{2} |\sinh(2x) - p(x)|^2 dx.$$

   (10 p)

5. Lös problemet:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= \cosh(x), \quad 0 < x < 4, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= v(x), \\ u(0,t) &= 0, \\ u(4,t) &= 0. \end{aligned}$$

(10 p)

6. Lös problemet:

$$u_t - u_{xx} = G(x,t), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$u(x,0) = v(x).$$

(10 p)

7. Lös problemet:

$$\begin{cases} u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} = 0 \quad 0 \le r \le 1, |\theta| \le \pi \\ u(1,\theta) = \sin^2\theta + \cos\theta \end{cases}$$

(10 p)

8. Beräkna för $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |J_n(x)|^2.$$

Tips: funktionen $e^{ix\sin(t)}$ är 2π periodisk in t-variabeln och

$$e^{ix\sin(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)e^{int}.$$

Lycka till! May the force be with you! ♡ Julie Rowlett.