

**Fourieranalys MVE030 och Fourier Metoder MVE290 5.juni.2018**

Betygsgränser: 3: 40 poäng, 4: 53 poäng, 5: 67 poäng.

Maximalt antal poäng: 80.

Hjälpmedel: BETA.

Examinator: Julie Rowlett.

Telefonvakt: Sebastian Jobjörnsson 5325

1. Låt  $f$  vara en  $2\pi$ -periodisk funktion med  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  (dvs  $f$  är deriverbar). Fourierkoefficienterna av  $f$ ,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx,$$

och Fourierkoefficienterna av  $f'$

$$c'_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx} dx.$$

Bevisa att Fourierkoefficienterna  $c_n$  av  $f$  och Fourierkoefficienterna  $c'_n$  av  $f'$  uppfyller

$$c'_n = inc_n.$$

(10 p)

2. Låt  $g \in L^1(\mathbb{R})$  med

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 1.$$

Antar att  $f$  är kontinuerlig och begränsad. Låt

$$g_\epsilon(x) = \frac{g(x/\epsilon)}{\epsilon}, \quad \epsilon > 0.$$

Bevisa:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f * g_\epsilon(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(Här betyder  $*$  faltning eller "convolution" på engelska.) (10 p)

3. Beräkna den komplexa Fourierserien till den  $2\pi$ -periodiska funktion  $f(x)$  som är lika med  $\cosh(x)$  i  $(-\pi, \pi)$ . Vad är seriens summa i punkten  $2\pi$ ? (10 p)

4. Hitta polynomet,  $p$ , av högst grad två som minimera

$$\int_{-2}^2 |\sinh(x) - p(x)|^2 dx.$$

(10 p)

5. Lös problemet:

$$\begin{aligned}u_t - u_{xx} &= e^{x+t}, & 0 < x < 4, & \quad t > 0 \\u(x, 0) &= v(x), \\u_x(0, t) &= 0, \\u_x(4, t) &= 0.\end{aligned}$$

(10 p)

6. Lös problemet:

$$\begin{aligned}u_t - u_{xx} &= G(x, t), & t > 0, & \quad x \in \mathbb{R}, \\u(x, 0) &= v(x).\end{aligned}$$

(10 p)

7. Lös problemet i annulusen:

$$\begin{cases}u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} = 0 & 1 < r < 2, |\theta| \leq \pi \\u(1, \theta) = 0 & |\theta| \leq \pi \\u(2, \theta) = 1 - \frac{\theta^2}{\pi^2} & |\theta| \leq \pi.\end{cases}$$

(10 p)

8. Om  $f(x)$  har Fouriertransformen  $\hat{f}(\xi)$  vad är Fouriertransformen av  $\cos(x)f(x/2)$ ?

Lycka till! May the force be with you! ♡ Julie Rowlett.