Fourieranalys MVE030 och Fourier Metoder MVE290 27.augusti.2019
Betygsgränser: 3: 40 poäng, 4: 53 poäng, 5: 67 poäng.
Maximalt antal poäng: 80.
Hjälpmedel: BETA.
Examinator: Julie Rowlett.
Telefonvakt: Mattias Lennartsson 5325.

1. Lös problemet:

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & t, x > 0 \\ u(x,0) = xe^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

(10 p)

2. Lös problemet:

$$\begin{cases} u(0,t) = \sin(t)e^t & t > 0 \\ u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & t, x > 0 \\ u(x,0) = 0 & x > 0 \end{cases}$$

(10 p)

3. Lös ekvationen:

$$u(t) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)^2} u(\tau) d\tau = e^{-|t|}.$$

(Tips: svaret kan vara en integral ekvation som $u(t) =$ (...integral grej...) som ni får låt vara så.) (10p)

4. Lös problemet:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = xe^x & 0 < t,\ 0 < x < 1 \\ u(x,0) = 0 & x \in [0,1] \\ u_t(x,0) = h(x) \in \mathcal{C}^0[0,1] & x \in [0,1] \\ u(0,t) = 0 = u(1,t) & t > 0 \end{cases}$$

(10p)

5. Beräkna:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{\pi + n}.$$

(Tips: beräkna Fourier-serien av den 2π periodiska funktionen som är lika med $\cos(\pi x)$ i intervallet $(-\pi, \pi)$.)

(10p)

6. Visa att om $n \in \mathbb{N}$

$$\pi J_n(z) = \int_0^{\pi} \cos(z \sin\theta - n\theta) d\theta.$$

(Tips: nästa uppgift med $z = e^{i\theta}$.) (10p)

7. Bevisa att för $z \neq 0$, de Bessel funktionerna uppfyller:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n = e^{\frac{x}{2}(z - \frac{1}{z})}.$$

(10p)

8. Låt $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vara en ortonormal mängd i ett Hilbert-rum, H. Om $f \in H$,

$$||f - \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle f, \phi_n\rangle \phi_n|| \leq ||f - \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \phi_n||, \quad \forall \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2,$$

och $=$ gäller $\iff$ $c_n = \langle f, \phi_n\rangle$ gäller $\forall n \in \mathbb{N}$. (10 p)

Fourier transforms

In these formulas below $a > 0$ and $c \in \mathbb{R}$.

$f(x)$	$\hat{f}(\xi)$
$f(x-c)$	$e^{-ic\xi}\hat{f}(\xi)$
$e^{ixc}f(x)$	$\hat{f}(\xi - c)$
$f(ax)$	$a^{-1}\hat{f}(a^{-1}\xi)$
$f'(x)$	$i\xi\hat{f}(\xi)$
$xf(x)$	$i(\hat{f})'(\xi)$
$(f * g)(x)$	$\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$
$f(x)g(x)$	$(2\pi)^{-1}(\hat{f} * \hat{g})(\xi)$
$e^{-ax^2/2}$	$\sqrt{2\pi/a}e^{-\xi^2/(2a)}$
$(x^2+a^2)^{-1}$	$(\pi/a)e^{-a\lvert\xi\rvert}$
$e^{-a\lvert x\rvert}$	$2a(\xi^2+a^2)^{-1}$
$\chi_a(x) = \begin{cases} 1 & \lvert x\rvert < a \\ 0 & \lvert x\rvert > a \end{cases}$	$2\xi^{-1}\sin(a\xi)$
$x^{-1}\sin(ax)$	$\pi\chi_a(\xi) = \begin{cases} \pi & \lvert\xi\rvert < a \\ 0 & \lvert\xi\rvert > a \end{cases}$

$$H(t) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Laplace transforms

In these formulas below, $a > 0$ and $c \in \mathbb{C}$.

$H(t)f(t)$	$\widetilde{f}(z)$
$H(t-a)f(t-a)$	$e^{-az}\widetilde{f}(z)$
$H(t)e^{ct}f(t)$	$\widetilde{f}(z-c)$
$H(t)f(at)$	$a^{-1}\widetilde{f}(a^{-1}z)$
$H(t)f'(t)$	$z\widetilde{f}(z) - f(0)$
$H(t)\int_0^t f(s)ds$	$z^{-1}\widetilde{f}(z)$
$H(t)(f * g)(t)$	$\widetilde{f}(z)\widetilde{g}(z)$
$H(t)t^{-1/2}e^{-a^2/(4t)}$	$\sqrt{\pi/z}e^{-a\sqrt{z}}$
$H(t)t^{-3/2}e^{-a^2/(4t)}$	$2a^{-1}\sqrt{\pi}e^{-a\sqrt{z}}$
$H(t)J_0(\sqrt{t})$	$z^{-1}e^{-1/(4z)}$
$H(t)\sin(ct)$	$c/(z^2+c^2)$
$H(t)\cos(ct)$	$z/(z^2+c^2)$
$H(t)e^{-a^2t^2}$	$(\sqrt{\pi}/(2a))e^{z^2/(4a^2)}\operatorname{erfc}(z/(2a))$
$H(t)\sin(\sqrt{at})$	$\sqrt{\pi a/(4z^3)}e^{-a/(4z)}$

Lycka till! May the force be with you! ♡ Julie Rowlett.