Fourieranalys MVE030 och Fourier Metoder MVE290 22.mars.2019
Betygsgränser: 3: 40 poäng, 4: 53 poäng, 5: 67 poäng.
Maximalt antal poäng: 80.
Hjälpmedel: BETA.
Examinator: Julie Rowlett.
Telefonvakt: Julie Rowlett (3419)

1. Lös problemet:

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & t, x > 0 \\ u(x,0) = f(x) \in \mathcal{L}^2((0,\infty)) \cap \mathcal{C}^0((0,\infty)) & x > 0 \end{cases}$$

(10 p)

2. Lös problemet:

$$\begin{cases} u(0,t) = e^t & t > 0 \\ u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & t, x > 0 \\ u(x,0) = 0 & x > 0 \end{cases}$$

(10 p)

3. Lös ekvationen:

$$u(t) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-\tau|} u(\tau) d\tau = e^{-|t|}.$$

(10p)

4. Lös problemet:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = e^x & 0 < t,\ 0 < x < 1 \\ u(x,0) = g(x) \in \mathcal{C}^0[0,1] & x \in [0,1] \\ u_t(x,0) = h(x) \in \mathcal{C}^0[0,1] & x \in [0,1] \\ u(0,t) = 0 = u(1,t) & t > 0 \end{cases}$$

(Antag att $g(0) = g(1) = 0$.)

(10p)

5. Beräkna:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\pi^2 + n^2}.$$

(Tips: beräkna Fourier-serien av $e^{\pi x}$.)

(10p)

6. (a) Bestäm om gränsvärdet finns eller inte och förklära varför (determine whether or not the following limit exists and give a reason for your answer):

$$\lim_{n\to\infty} A_n, \quad A_n := \int_{-\pi}^{\pi} inx^2 e^{-inx} dx.$$

(5p)

(b) Beräkna:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n e^{42i\pi n/4}.$$

(5p)

7. Låt f vara en 2π-periodisk funktion med $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Bevisa att Fourierkoefficienterna c_n av f och Fourierkoefficienterna c_n' av f' uppfyller

$$c_n' = inc_n.$$

(Assume that f is a 2π periodic smoothly differentiable function on $\mathbb{R}$. Prove that the Fourier coefficients, c_n of f and c_n' of f' satisfy $c_n' = inc_n$).

(10p)

8. Låt $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vara ortonormala i ett Hilbert-rum, H. Bevisa att följande tre är ekvivalenta: (Prove that the three conditions below are equivalent statements in a Hilbert space H.)

$$(1) \quad f \in H \text{ och } \langle f, \phi_n \rangle = 0 \forall n \in \mathbb{N} \implies f = 0.$$

$$(2) \quad f \in H \implies f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n.$$

$$(3) \quad ||f||^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle f, \phi_n \rangle|^2.$$

(10 p)

Fourier transforms

In these formulas below $a > 0$ and $c \in \mathbb{R}$.

$f(x)$	$\hat{f}(\xi)$
$f(x-c)$	$e^{-ic\xi}\hat{f}(\xi)$
$e^{ixc}f(x)$	$\hat{f}(\xi - c)$
$f(ax)$	$a^{-1}\hat{f}(a^{-1}\xi)$
$f'(x)$	$i\xi\hat{f}(\xi)$
$xf(x)$	$i(\hat{f})'(\xi)$
$(f * g)(x)$	$\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$
$f(x)g(x)$	$(2\pi)^{-1}(\hat{f} * \hat{g})(\xi)$
$e^{-ax^2/2}$	$\sqrt{2\pi/a}e^{-\xi^2/(2a)}$
$(x^2+a^2)^{-1}$	$(\pi/a)e^{-a\lvert\xi\rvert}$
$e^{-a\lvert x\rvert}$	$2a(\xi^2+a^2)^{-1}$
$\chi_a(x) = \begin{cases} 1 & \lvert x\rvert < a \\ 0 & \lvert x\rvert > a \end{cases}$	$2\xi^{-1}\sin(a\xi)$
$x^{-1}\sin(ax)$	$\pi\chi_a(\xi) = \begin{cases} \pi & \lvert\xi\rvert < a \\ 0 & \lvert\xi\rvert > a \end{cases}$

$$H(t) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Laplace transforms

In these formulas below, $a > 0$ and $c \in \mathbb{C}$.

$H(t)f(t)$	$\widetilde{f}(z)$
$H(t-a)f(t-a)$	$e^{-az}\widetilde{f}(z)$
$H(t)e^{ct}f(t)$	$\widetilde{f}(z-c)$
$H(t)f(at)$	$a^{-1}\widetilde{f}(a^{-1}z)$
$H(t)f'(t)$	$z\widetilde{f}(z) - f(0)$
$H(t)\int_0^t f(s)ds$	$z^{-1}\widetilde{f}(z)$
$H(t)(f * g)(t)$	$\widetilde{f}(z)\widetilde{g}(z)$
$H(t)t^{-1/2}e^{-a^2/(4t)}$	$\sqrt{\pi/z}e^{-a\sqrt{z}}$
$H(t)t^{-3/2}e^{-a^2/(4t)}$	$2a^{-1}\sqrt{\pi}e^{-a\sqrt{z}}$
$H(t)J_0(\sqrt{t})$	$z^{-1}e^{-1/(4z)}$
$H(t)\sin(ct)$	$c/(z^2+c^2)$
$H(t)\cos(ct)$	$z/(z^2+c^2)$
$H(t)e^{-a^2t^2}$	$(\sqrt{\pi}/(2a))e^{z^2/(4a^2)}\operatorname{erfc}(z/(2a))$
$H(t)\sin(\sqrt{at})$	$\sqrt{\pi a/(4z^3)}e^{-a/(4z)}$

Lycka till! May the force be with you! ♡ Julie Rowlett.