Tentamensskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2006-03-10, kl. 8.30-12.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Johan Jansson, tel. 0762-721860
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

==========

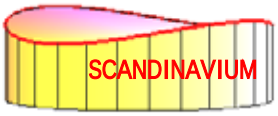
1. Låt $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy - 6$.

a) Ange en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(1,2,3)$. (5p)

b) Bestäm riktningsderivatan av f i punkten $(1,2)$ i riktningen $(2,1)$. (3p)

c) Bestäm alla stationära punkter till f och deras karaktär. (7p)

2. Scandinavium K i Göteborg definieras (i lämpligt koordinatsystem) av olikheterna $0 \le z \le 15 + \frac{x^2}{500}$, $x^2 + y^2 \le 2500$.



a) Beräkna volymen av K. (6p)

b) Beräkna arean av Scandinaviums yttervägg
[Scandinaviums yttervägg är ytan $\left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 2500,\ 0 \le z \le 15 + \frac{x^2}{500}\right\}$]. (6p)

c) Beräkna flödet av $\boldsymbol{v} = (x, y, 2z)$ ut ur Scandinavium genom tak och yttervägg
[Scandinaviums tak är ytan $\left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le 2500,\ z = 15 + \frac{x^2}{500}\right\}$]. (5p)

d) Klockan 12 en vacker vårdag var temperaturen på och kring Scandinaviums tak
$T(x,y,z) = 10^{-3}\left(y^2 - xy + 500z\right)$ [$^{\circ}$Celsius].
Mellan vilka värden varierade temperaturen på K:s tak då? (7p)

3. Låt $\mathbb{F} = \left(\frac{1}{1+(x-y)^2}, \frac{y+z}{1+(y+z)^2} - \frac{1}{1+(x-y)^2}, \frac{y+z}{1+(y+z)^2} \right)$.

Visa att $\mathbb{F}$ är konservativt i $\mathbb{R}^3$ och beräkna det arbete som $\mathbb{F}$ uträttar längs kurvan $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (e^{\cos 2t}, e^{\sin 2t}, -\cos t),\ 0 \xrightarrow{t} \pi$. (8p)

4. **a)** Definiera differentialen av ett fält $\mathbb{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ i en punkt $\boldsymbol{a}$. (3p)

b) Formulera Stokes' sats. (3p)

5. Formulera och bevisa en formel för derivering av en sammansatt funktion $f(x(t), y(t))$. (7p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

Tentamensskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2006-08-30, kl. 14.00-18.00 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Jonatan Vasilis, tel. 0762-721860
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

==========

1. Funktionen $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är C^1. Visa att funktionen $h(x,y,z) = zf\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)$ satisfierar differentialekvationen $xh'_x + yh'_y + zh'_z = h$. (7p)

2. Låt $f(x,y) = (x-x^2)(y-y^2)$.

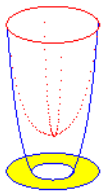
a) Bestäm alla stationära punkter till f och deras karaktär. (8p)

b) Vilka värden antar $f(x,y)$ på $D = \{(x,y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$? (3p)

3. Beräkna arean av ytan $Y: \begin{cases} x = u^2 \\ y = 2uv, \quad 0 \le u \le 2, 0 \le v \le 1; \\ z = 2v^2 \end{cases}$ (7p)

ange även en ekvation för tangentplanet till ytan Y i punkten $\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$. (2p) (9p)

4. En vas definieras av olikheterna $0 \le 3e^{x^2+y^2} - 4 \le 2z \le 2e^{x^2+y^2}$.



a) Hur mycket vatten ryms i vasen? (4p)

b) Beräkna vasens totala massa då dess densitet är $\rho(x,y,z) = 1$. (4p)

5. Låt $\mathbb{F} = \left(ye^{\cos x},\ xe^{\sin z},\ y(z+1)e^{\cos x}\sin x\right)$.

a) Har $\mathbb{F}$ en potential i $\mathbb{R}^3$? (3p)

b) Har $\mathbb{F}$ en vektorpotential $\mathbb{R}^3$? (3p)

c) Beräkna flödet av $\mathbb{F}$ uppåt genom ytan $z = f(x,y),\ (x,y) \in D$ i uppgift 2. (6p)

6. **a)** Formulera och bevisa Green's sats. (8p)

b) Låt $\mathbb{F}$ vara ett virvelfritt C^1-fält i $\mathbb{R}^3$. Visa $\int_C \mathbb{F} \bullet d\boldsymbol{r}$ är oberoende av vägen. (5p)

Betygsgränser:

24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

Tentamensskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2007-01-19, kl. 8.30-12.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Micke Persson, tel. 0762-721860; Lennart Falk, tel. 0760-721861
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

==========

1. Låt $f(x,y)=x^2+y^2-2y$.

a) Ange en ekvation för tangentplanet till ytan $z=f(x,y)$ i punkten $(1,2,1)$. (4p)

b) Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(1,2)$ i riktningen $(2,1)$. (3p)

c) Beräkna arean av ytan $Y: z=f(x,y),\ x^2+(y-1)^2\le 2$. (7p)

2. Låt $u=2x^3-3y^2, v=3x^2+2y^3$ och $\Omega=\{(x,y):\ x>0, y>0\}$. Visa att tillordningen $(x,y)\mapsto(u,v)$ är bijektiv lokalt i varje punkt i Ω (2p) och lös problemet $y^2 f'_x - xf'_y = \dfrac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(x,y)}$, $f(x,x)=24x^3$, $(x,y)\in\Omega$ (6p). [tips: använd u,v som nya variabler] (8p)

3. Beräkna massan av kroppen $K=\left\{(x,y,z):\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{8-x^2-y^2}\right\}$, då dess densitet är $\rho(x,y,z)=|xyz|$. (7p)

4. Vilka värden antar potentialen $\Phi(x,y,z)=6xy-z^3$ på sfären $x^2+y^2+z^2=5$? (8p)

5. Låt $\mathbb{F}=\left(3x^2y^2+\frac{\sin x}{1+x^2},\ 2y\left(x^3+e^{-y^4}\right)\right)$.

a) Är $\mathbb{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^2$? (2p)

b) Beräkna det arbete som $\mathbb{F}$ uträttar då en partikel förflyttas från $(-2,2)$ till $(2,-2)$ medurs längs ellipsen $2x^2+3y^2=20$. (5p)

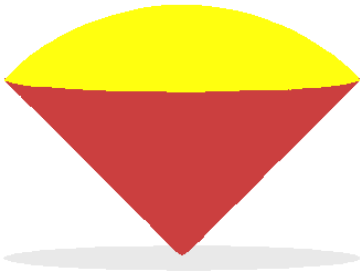
6. **a)** Formulera och bevisa Gauss' sats. (8p)

b) Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$. (4p)

c) Visa att ett konservativt fält som är C^1 i $\mathbb{R}^3$ är virvelfritt i $\mathbb{R}^3$. (4p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

SVAR:

06-03-10:	**1a**) $4x-28y+z+49=0$ **b**) $4\sqrt{5}$ **c**) $(0,0)$ (sadelpunkt), $\pm(1,1)$ (lok. minimipunkter) **2a**) 40625π **b**) 1750π **c**) 162500π **d**) $V_T=[7.5^\circ, 11.25^\circ]$ **3**) $\ln\sqrt{5}$
06-08-30:	**2a)** $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$ sadelpunkter, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ str. lok. maximipunkt **b)** $V_f=[0,\frac{1}{16}]$ **3)** arean är 16, tangentplan: $x-2y+2z=0$ **4a)** $\pi(8\ln 2-3)$ **b)** $\pi(2\ln 3-1)$ **5a)** nej **b)** ja **c)** $\frac{1}{2}(e-e^{\cos 1})$
07-01-19:	**1a)** $2x+2y-z=5$ **b)** $\frac{6}{\sqrt{5}}$ **c)** $\frac{13\pi}{3}$ **2)** $f(x,y)=12(x^3+y^3)+18(x^2-y^2)$ **3)** $\frac{32}{3}$ **4)** $[-15,15]$ **5a)** ja **b)** 64

kroppen i 07-01-19, uppg. 3: