Tentamen i flervariabelanalys för F1 (mve035), 06-08-30

uppg. 1

Med $u = \frac{x}{z}$, $v = \frac{y}{z}$ och $w = z$ gäller för funktionen $h(x,y,z) = zf\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$:
$h'_x = z\left(f'_u u_x + f'_v v'_x\right) = f'_u$, $h'_y = z\left(f'_u u'_y + f'_v v'_y\right) = f'_v$, $h'_z = f + z\left(f'_u u'_z + f'_v v_z\right) =$
$= f - \frac{x}{z} f'_u - \frac{y}{z} f'_v$, alltså är $xh'_x + yh'_y + zh'_z = zf = h$. vsv

uppg. 2

$f(x) = \left(x - x^2\right)\left(y - y^2\right)$ är C^3 i $\mathbb{R}^2$.

a) $\begin{cases} f'_x = (1-2x)\left(y-y^2\right) = (1-2x)\,y\,(1-y) = 0 \\ f'_y = \left(x-x^2\right)(1-2y) = x\,(1-x)\,(1-2y) = 0 \end{cases}$; $f'_x = 0$ ger tre fall:

1. $x = \frac{1}{2} \implies f'_y\left(\frac{1}{2}, y\right) = \frac{1}{4}(1-2y) = 0 \implies y = \frac{1}{2}$
2. $y = 0 \implies f'_y(x,0) = x(1-x) = 0 \implies x \in \{0,1\}$
3. $y = 1 \implies f'_y(x,1) = -x(1-x) = 0 \implies x \in \{0,1\}$,

f:s stationära punkter är således $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ och $(1,1)$.
För att bestämma deras karaktär beräknar vi f:s andra derivator:

i punkterna →	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$f''_{xx} = -2\left(y - y^2\right)$	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$
$f''_{xy} = (1-2x)(1-2y)$	1	-1	-1	1	0
$f''_{yy} = -2\left(x - x^2\right)$	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$

Den kvadratiska formen $Q(h,k) = f''_{xx}(a,b)\,h^2 + 2f''_{xy}(a,b)\,hk + f''_{yy}(a,b)\,k^2$ är då indefinit $(= \pm 2hk)$ i punkterna $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ och $(1,1)$ och negativt definit $\left(= -\frac{1}{2}\left(h^2 + k^2\right)\right)$ i $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ vilket visar att punkterna $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ och $(1,1)$ är sadelpunkter (detta inses även lätt direkt) och $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ är en sträng lokal maximipunkt.

b) f är kontinuerlig på D, D är kompakt och bågvis sammanhängande, alltså antar f på D ett minta värde m och ett största värde M och alla värden mellan m och M. Dessa värden antas i inre (och då stationära) punkter eller på randen; enda stationära punkten i D är $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ med $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$, på randen är $f = 0$, svaret är alltså $\left[0, \frac{1}{16}\right]$.

svar:

a) $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ (sadelpunkter), $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (str.lokal maximimipkt.)
b) $\left[0, \frac{1}{16}\right]$

uppg. 3

$\boldsymbol{r}(u,v) = \left(u^2, 2uv, 2v^2\right)$, $\boldsymbol{r}'_u = (2u, 2v, 0)$, $\boldsymbol{r}'_v = (0, 2u, 4v)$
$\Longrightarrow$ $\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v = \left(8v^2, -8uv, 4u^2\right)$. Arean av ytan $Y : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$ $(0 \le u \le 2, 0 \le v \le 1)$ är därmed $m(Y) = \iint\limits_D |\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v|\,dudv =$

$$= \iint\limits_D 4\sqrt{4v^4 + 4u^2v^2 + u^4}dudv = 4\int_0^2\int_0^1 \left(2v^2 + u^2\right) dvdu =$$

$$= 4\int_0^2 \left[\tfrac{2}{3}v^3 + vu^2\right]_{v=0}^{v=1} du = 4\int_0^2 \left(\tfrac{2}{3} + u^2\right) du = 4\left[\tfrac{2}{3}u + \tfrac{1}{3}u^3\right]_0^2 = \tfrac{4}{3}(4+8) = \underline{16}.$$

En normalvektor till ytan Y i punkten $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{r}\left(1, \frac{1}{2}\right)$ är $\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v\left(1, \frac{1}{2}\right) = (2, -4, 4) = 2(1, -2, 2)$, tangentplanet till Y i punkten $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$ har alltså ekvationen $\underline{1(x-1) - 2(y-1) + 2\left(z - \frac{1}{2}\right)}$.

$\boxed{\underline{\textbf{svar}}\text{: } 16;\ x - 2y + 2z = 0}$

uppg. 4

Vasen är en rotationskropp (kurvorna $z_n = \frac{3}{2}e^{x^2} - 2$ resp. $z_ö = e^{x^2}$ roterar kring z-axeln), nivåkurvorna till kroppens randyta är cirklar $r^2 = x^2 + y^2$, $3e^{r^2} - 4 \ge 0$ ger $r \ge \sqrt{\ln \frac{4}{3}} =: a$, $3e^{r^2} - 4 \le 2e^{r^2}$ ger $r \le \sqrt{\ln 4} =: b$, $z_ö\left(\sqrt{\ln 4}\right) = 4$.

a) Vattenvolymen är alltså $\iint\limits_{x^2+y^2 \le b^2} \left(4 - e^{x^2+y^2}\right) dxdy =$ (med polära

koordinater) $= \int_0^{2\pi}\int_0^b \left(4r - re^{r^2}\right) drd\varphi = 2\pi\left[2r^2 - \frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^b =$

$= 2\pi\left(2\ln 4 - \frac{4}{2} + \frac{1}{2}\right) = \underline{\pi(8\ln 2 - 3)}$.

b) Vasens massa är (med pol. koord.) $\int_0^{2\pi}\int_0^b e^{r^2} rdrd\varphi - \int_0^{2\pi}\int_a^b \left(\frac{3}{2}e^{r^2} - 2\right) rdrd\varphi =$

$= 2\pi\left(\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^{\sqrt{\ln 4}} - \left[\frac{3}{4}e^{r^2} - r^2\right]_{\sqrt{\ln\frac{4}{3}}}^{\sqrt{\ln 4}}\right) = 2\pi\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} - 3 + 1 + \ln 4 - \ln\frac{4}{3}\right) =$
$= \underline{2\pi\left(-\frac{1}{2} + \ln 3\right)}$.

$\boxed{\underline{\textbf{svar}}\text{: } \textbf{a)}\ \pi(8\ln 2 - 3);\ \textbf{b)}\ \pi(2\ln 3 - 1)}$

uppg. 5

a) Fältet $\boldsymbol{F} = \left(ye^{\cos x}, xe^{\sin z}, (z+1)\, ye^{\cos x} \sin x\right)$ är C^2 i $\mathbb{R}^3$,
rot$\boldsymbol{F} = \left(..., ..., e^{\sin z} - e^{\cos x}\right) \neq (0,0,0)$, alltså har $\boldsymbol{F}$ ej en potential i $\mathbb{R}^3$
($\boldsymbol{F}$ =grad$U \Rightarrow rot\boldsymbol{F} = \overrightarrow{0}$).

b) div$\boldsymbol{F} = -ye^{\cos x} \sin x + 0 + ye^{\cos x} \sin x = 0$, alltså har $\boldsymbol{F}$ en vektorpotential
($\mathbb{R}^3$ är konvex).

c) Låt $K = \{(x,y,z) : \ (x,y) \in D, \ 0 \le z \le f(x,y)\}$ med utåtriktat enhetsnormalfält $\boldsymbol{N}$; då är $\partial K = Y \cup D$ och $\iint\limits_{\partial K} \boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{N}\, dS =$

$$= \iint\limits_{Y} \boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{N}\, dS + \iint\limits_{D} \boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{N}\, dS = [\text{Gauss}] = \iiint\limits_{K} \text{div}\boldsymbol{F}\, dxdydz = 0, \text{ alltså}$$

$$\text{är } \iint\limits_{Y} \boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{N}\, dS = \iint\limits_{D} \boldsymbol{F} \bullet (0,0,1)\, dxdy = \iint\limits_{D} ye^{\cos x} \sin x dxdy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 ye^{\cos x} \sin x dxdy = \left[\tfrac{1}{2} y^2\right]_0^1 \left[-e^{\cos x}\right]_0^1 = \underline{\tfrac{e - e^{\cos 1}}{2}}.$$

$$\boxed{\underline{\textbf{svar}}\text{: } \textbf{a)} \text{ nej; } \ \textbf{b)} \text{ ja; } \ \textbf{c)} \ \tfrac{1}{2}\left(e - e^{\cos 1}\right)}$$