# Tentamen i flervariabelanalys för F1 (mve035), 07-03-16

## uppg. 1

$F(x,y,z) = (\ln x + xz)\cos(y)\arctan(y+z)$, $F'_x = \left(\frac{1}{x} + z\right)\cos(y)\arctan(y+z)$,
$F'_y = (\ln x + xz)\left(-\sin(y)\arctan(y+z) + \frac{\cos(y)}{1+(y+z)^2}\right)$,
$F'_z = \cos(y)\left(x\arctan(y+z) + \frac{\ln x + xz}{1+(y+z)^2}\right) \implies \text{grad}F(1,0,1) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\pi+2}{4}\right)$.

**a)** $F'_z(1,0,1) = \frac{\pi+2}{4} \neq 0$, implicita funktionssatsen ger ($F$ är $C^1$ i en omgivning till $(1,0,1)$) att $F(x,y,z) = \frac{\pi}{4} = F(1,0,1)$ lokalt kring $(1,0,1)$ definierar en $C^1$ funktion $z = f(x,y)$, kedjeregeln ger
$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,f(x,y)) = \frac{\partial F}{\partial x} + 0 + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, alltså $f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$, analogt fås
$f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$, därmed har vi $f'_x(1,0) = -\frac{2\pi}{\pi+2}$ och $f'_y(1,0) = -\frac{2}{\pi+2}$.

**b)** Tangentplanet har ekv. $z = f(1,0) + f'_x(1,0)(x-1) + f'_y(1,0)(y-0) =$
$= 1 - \frac{2\pi}{\pi+2}x + \frac{2\pi}{\pi+2} - \frac{2}{2+\pi}y$, dvs. $\underline{2\pi x + 2y + (\pi+2)z = 3\pi + 2}$.
Alternativt kan du beräkna tangentplanet som
$\text{grad}F(1,0,1) \bullet (x-1, y-0, z-1) = 0$.

**c)** I punkten $(1,0,1)$ växer $F$ snabbast i riktningen $\text{grad}F(1,0,1) = \underline{\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\pi+2}{4}\right)}$.
**svar:**

$\boxed{\textbf{a)}\ f'_x = \frac{-2\pi}{\pi+2},\ f'_y = \frac{-2}{\pi+2} \quad \textbf{b)}\ 2\pi x + 2y + (\pi+2)z = 3\pi + 2 \quad \textbf{c)}\ (2\pi, 2, \pi+2)}$

## uppg. 2

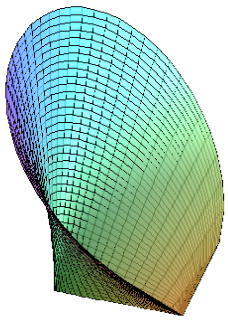
$Y : \boldsymbol{r}(u,v) = \left(u^2, 2v\sin u, 2v\cos u\right)$, $D : u^2 + v^2 \leq 1,\ v \geq 0$. Då är

$$\boldsymbol{r}'_u(u,v) \times \boldsymbol{r}'_v(u,v) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 2u & 2v\cos u & -2v\sin u \\ 0 & 2\sin u & 2\cos u \end{vmatrix} = 4(v, -u\cos u, u\sin u),$$

arean av $Y$ är då $m(Y) = \iint\limits_D |\boldsymbol{r}'_u(u,v) \times \boldsymbol{r}'_v(u,v)|\,dudv = 4\iint\limits_D \sqrt{v^2+u^2}\,dudv =$

[polära koordinater] $= 4\int\limits_0^\pi \int\limits_0^1 r^2\,drd\varphi = \underline{\frac{4\pi}{3}}$.

$\boxed{\textbf{svar: } \frac{4\pi}{3}}$



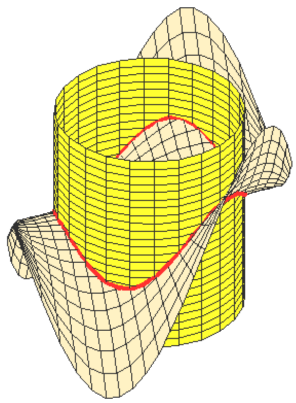
Ytan i uppgift 2

# uppg. 3

Vi skall bestämma det största och det minsta värde som $f(x,y) = xy^2$ antar under bivillkoret $g(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$: $\text{grad}g = (2x, 2y) \neq (0,0)$ (på cirkeln $g \equiv 0$), enligt Lagrange gäller då i extrempunkter $\text{grad}f = \lambda_0 \text{grad}g$ för ngt. $\lambda_0$:
$\begin{cases} f'_x = y^2 = \lambda_0 g'_x = 2\lambda_0 x \\ f'_y = 2xy = \lambda_0 g'_y = 2\lambda_0 y \end{cases} \underset{yf'_x - xf'_y}{\Longrightarrow} y^3 = 2x^2 y \implies y = 0$ eller $y^2 = 2x^2$,
bivillkoret ger då $x^2 = 1$ eller $3x^2 = 1$, vi har därmed kandidaterna $\pm(1,0)$ och $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. $f$ är kontinuerlig, cirkeln $g \equiv 0$ är kompakt, alltså antar $f$ på cirkeln ett största och ett minsta värde, dessa måste finnas bland $f(\pm 1, 0) = 0$ och $f\left(\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right) = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}$, de högsta punkterna är således $\underline{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)}$, de lägsta punkterna är $\underline{\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{-2}{3\sqrt{3}}\right)}$.
En annan (enkel) lösning fås med parameterframställingen
$\boldsymbol{r}(t) = \left(\cos t, \sin t, \cos t \sin^2 t\right)$ av kurvan: max/min av $h(t) = \cos t \sin^2 t$, $t \in [0, 2\pi]$, ger de högsta/lägsta punkterna på kurvan:
$h'(t) = -\sin^3 t + 2\cos^2 t \sin t = \sin t(2 - 3\sin^2 t) = 0$ för $0 < t < 2\pi$ ger kandidaterna $\sin t = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\left(\cos t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\sin t = 0$ $(\cos t = -1)$, randpunkterna $(t = 0, 2\pi)$ ger $\sin t = 0$ $(\cos t = 1)$, alltså samma punkter som ovan.

En tredje lösning (den enklaste?) fås genom att lösa ut $y^2$ ur bivillkoret och bestämma max/min av $z = g(x) = x\left(1 - x^2\right)$, $x \in [-1, 1]$ (kompakt!):
$g'(x) = 1 - 3x^2 = 0$ ger kandidaterna $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, max/min finns då bland
$g(\pm 1) = 0$ och $g\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}} \cdots$.

**svar:** $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{-2}{3\sqrt{3}}\right)$ resp. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$



kurvan i uppg. 3

# uppg. 4

Kroppens totala massa är $M(K) = \iiint\limits_K \rho(x,y,z)\,dxdydz$;

$K$ är en uppochnervänd kon med spetsen i origo, obegränsad upptill, integralen är dessutom generaliserad i origo. Vi väljer som uttömmande följd

$K_n : \frac{1}{n} \le \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{n^2-x^2-y^2}$ och beräknar

$I_n = \iiint\limits_{K_n} \frac{1}{z^2(1+x^2+y^2+z^2)}dxdydz =$[i sfäriska koordinater] $=$

$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{r^2\sin\theta}{r^2\cos^2\theta(1+r^2)}drd\varphi d\theta = 2\pi\left[\arctan r\right]_{r=\frac{1}{n}}^{r=n}\left[\frac{1}{\cos\theta}\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} =$

$= 2\pi\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\arctan n - \arctan\frac{1}{n}\right)$, alltså är $M(K) = \lim\limits_{n\to\infty} I_n = \underline{\left(\sqrt{2}-1\right)\pi^2}$.

$\boxed{\textbf{svar: } \left(\sqrt{2}-1\right)\pi^2}$

# uppg. 5

$\boldsymbol{F} = \left(e^{x^2+y^2}\cos z, (x+y)\,e^{z^2}, e^{xyz}\right)$ är $C^2$ i $\mathbb{R}^3$, definitionsmängden till $f(x,y) = \sqrt{e-e^{x^2+y^2}}\cosh(\cos(x+2y))$ är $D_f = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\right\}$, flödet av rot$\boldsymbol{F}$ uppåt genom ytan $z = f(x,y)$ är $F = \iint\limits_Y \text{rot}F \bullet \boldsymbol{n}dS$ ($\boldsymbol{n}$ uppåt).

**a1)** Ytan $Y$ ligger ovanför $xy$-planet ($z \ge 0$), snittet mellan $Y$ och $xy$-planet är cirklen $C : x^2+y^2 = 1$ genomlöpt moturs (då är $Y$ en orienterad yta med rand) och Stokes ger $F = \iint\limits_Y \text{rot}\boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{n}dS = \int\limits_C \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{r} =$

$$\left[C : \begin{cases} x = \cos t, dx = -\sin t dt \\ y = \sin t,\ dy = \cos t dt \quad ,0 \xrightarrow{t} 2\pi \\ z = 0, \quad dz = 0dt \end{cases}\right]$$

$= \int\limits_0^{2\pi}\left(-e\sin t + (\cos t + \sin t)\cos t + 0\right)dt =$

$= \int_0^{2\pi} \left(-e \sin t + \frac{1+\cos 2t}{2} + \sin t \cos t\right) dt =$

$= \left[e \cos t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + \frac{\sin^2 t}{t}\right]_0^{2\pi} = \underline{\pi}$. Det kan du också beräkna med Green:

$F = \iint_{D_f} \left((x+y)'_x - (1)'_y\right) dxdy = m\left(D_f\right) = \pi.$

**a2)** $Y \cup D_f$ är rand till en Kropp $K$ med utåtriktad normal (om vi väljer $\boldsymbol{n}_1 = (0,0,-1)$ för $D_f$), Gauss ger $\iint_{Y \cup D_f} \text{rot}\boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{n} dS = \iiint_K \text{div}(\text{rot}\boldsymbol{F})\, dxdydz =$

$= 0$, alltså $F = \iint_Y \text{rot}\boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{n} dS = \iint_{D_f} \text{rot}\boldsymbol{F} \bullet (0,0,1)\, dS =$

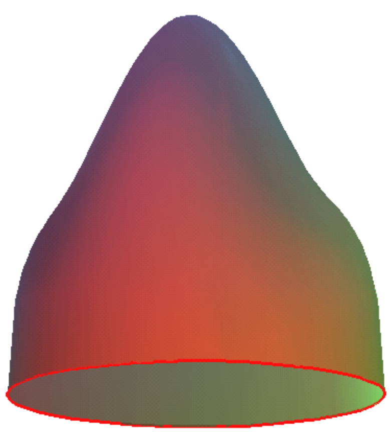
$\left[rot\ \boldsymbol{F} = \left(\cdots, \cdots, e^{z^2} - 2ye^{x^2+y^2} \cos z\right),\ z = 0\right] = \iint_{D_f} \left(1 - 2ye^{x^2+y^2}\right) dxdy =$

[pol.koord.] $= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(r - 2r^2 \sin \varphi e^{r^2}\right) d\varphi dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \underline{\pi}.$

**b)** $\boldsymbol{F}$ är inte konservativt i $\mathbb{R}^3$ ty kurvintegralen längs den slutna kurvan $C$ är inte 0 enligt **a1)**, eller ty

$\text{rot}\boldsymbol{F} = \left(\cdots, \cdots, e^{z^2} - 2ye^{x^2+y^2} \cos z\right) \neq (0,0,0)$ enligt **a2)**.

$\boxed{\text{svar: } \textbf{a)}\ \pi \qquad \textbf{b)}\ \text{nej}}$



ytan $Y$ underifr.