

# Övningstenta i flervariabelanalys F1 (mve035), 07-02-17

## uppg. 1

$$f(x, y) = x + y + \sqrt{3 - x^2 - y^2} \Rightarrow \text{grad} f(x, y) = \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}, 1 - \frac{y}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}} \right)$$

$$\Rightarrow \text{grad} f(-1, -1) = (2, 2).$$

a) Tangentplanet har ekvationen

$$z = f(-1, -1) + f'_x(-1, -1)(x + 1) + f'_y(-1, -1)(y + 1) =$$

$$= -1 + 2x + 2 + 2y + 2 \text{ dvs. } \underline{2x + 2y - z + 3 = 0}.$$

b) Observera att  $D_f$  är cirkelskivan  $x^2 + y^2 \leq 3$ ,  $f$  är  $C^1$  i inre punkter i  $D_f$ .

$$\begin{cases} f'_x = 1 - \frac{x}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}} = 0 \\ f'_y = 1 - \frac{y}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}} = 0 \end{cases} \iff x = y = \sqrt{3 - x^2 - y^2}, \text{ det ger } x \geq 0 \text{ och}$$

$x^2 = 3 - 2x^2$ , enda stationära punkten är alltså  $(1, 1)$ . Karaktären:

$$\left. \begin{aligned} f''_{xx} &= -\frac{\sqrt{3 - x^2 - y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}}{3 - x^2 - y^2} = \frac{y^2 - 3}{(3 - x^2 - y^2)\sqrt{3 - x^2 - y^2}} \\ f''_{yy} &= -\frac{\sqrt{3 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}}{3 - x^2 - y^2} = \frac{x^2 - 3}{(3 - x^2 - y^2)\sqrt{3 - x^2 - y^2}} \\ f''_{xy} &= \frac{-xy}{(3 - x^2 - y^2)\sqrt{3 - x^2 - y^2}} \end{aligned} \right\} \implies$$

$$\begin{cases} f''_{xx}(1, 1) = -2 \\ f''_{yy}(1, 1) = -2 \\ f''_{xy}(1, 1) = -1 \end{cases}, \text{ den kvadratiska formen}$$

$$Q(h, k) = f''_{xx}(1, 1)h^2 + 2f''_{xy}(1, 1)hk + f''_{yy}(1, 1)k^2 =$$

$$= -2(h^2 + hk + k^2) = -2\left(\left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}k^2\right) \text{ är negativt definit,}$$

punkten  $(1, 1)$  är alltså en sträng lokal maximipunkt.

ANM: Man kan också beräkna största/minsta värde som  $f$  antar på den kompakta mängden  $D_f$  (det tillkommer undersökningen av randen  $x^2 + y^2 = 3$ ): man får att  $f$  antar i  $(1, 1)$  sitt största värde ( $f(1, 1) = 3$ ).

|                                    |   |
|------------------------------------|---|
| <b>svar: a)</b> $2x + 2y - z = -3$ | <b>b)</b> $(1, 1)$ sträng lokal maximipunkt |
|------------------------------------|---|

## uppg. 2

a)  $\begin{cases} u = y + \cosh x \\ v = y - \sinh x \end{cases}, \frac{d(u, v)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sinh x & 1 \\ -\cosh x & 1 \end{vmatrix} =$

$= \sinh x + \cosh x = e^x > 0$  för alla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Eftersom  $u, v$  är  $C^1$  i  $\mathbb{R}^2$  så ger inversa funktionssatsen att tillordningen  $(x, y) \mapsto (u, v)$  är lokalt bijektiv i varje punkt i  $\mathbb{R}^2$ .

b) Kedjeregeln ger

$$\left. \begin{aligned} f'_x &= f'_u u'_x + f'_v v'_x = \sinh x f'_u - \cosh x f'_v \\ f'_y &= f'_u u'_y + f'_v v'_y = f'_u + f'_v \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$f'_x + \cosh x f'_y = (\sinh x + \cosh x) f'_u = e^x f'_u \stackrel{!}{=} e^x \Rightarrow f'_u = 1 \Rightarrow$$

$$f(u, v) = u + g(u, v) \Rightarrow f(x, y) = y + \cosh x + g(y - \sinh x) \Rightarrow$$

$$f(x, 2 \sinh x) = 2 \sinh x + \cosh x + g(\sinh x) \stackrel{!}{=} \cosh x \Rightarrow$$

$$g(t) = -2t \Rightarrow f(x, y) = y + \cosh x - 2(y - \sinh x) = 2 \sinh x + \cosh x - y.$$

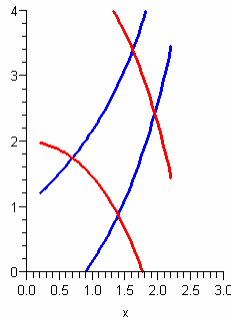
c) Området  $D$  beskrives av  $3 \leq y + \cosh x \leq 6$ ,  $-1 \leq y - \sinh x \leq 1$ , i variablerna  $u$  och  $v$  är det  $D' : 3 \leq u \leq 6$ ,  $-1 \leq v \leq 1$ , arean är alltså

$$\iint_D dx dy = \iint_{D'} \left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| du dv = \left[ \frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{\frac{d(u,v)}{d(x,y)}} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{u-v} > 0 \right] =$$

$$= \int_3^6 \int_{-1}^1 \frac{1}{u-v} dv du = \int_3^6 [-\ln(u-v)]_{v=-1}^{v=1} du = \int_3^6 (\ln(u+1) - \ln(u-1)) du =$$

$$[\text{p.i.}] = [(u+1) \ln(u+1) - (u-1) \ln(u-1)]_3^6 = 7 \ln 7 - 5 \ln 5 - 4 \ln 4 + 2 \ln 2.$$

|  |
|--|
| <b>svar:</b> b) $f(x, y) = 2 \sinh x + \cosh x - y$ c) $7 \ln 7 - 5 \ln 5 - 6 \ln 2$ |
|--|



### uppg. 3

$f(0, y) = 0$  och  $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$  för  $x \neq 0$ ;

för  $\mathbf{v} = (\alpha, \beta)$  med  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$  gäller:

om  $\alpha \neq 0$ :  $f'_\mathbf{v}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\alpha, t\beta) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 \alpha \beta^2}{t(t^2 \alpha^2 + t^4 \beta^4)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha \beta^2}{\alpha^2 + t^2 \beta^4} = \frac{\beta^2}{\alpha}$ ,

om  $\alpha = 0$ :  $f'_\mathbf{v}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t\beta) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0$  ( $\beta = \pm 1$  då), alltså existerar

riktningsderivatan i origo i varje riktning. Vi ser även att  $\text{grad} f(0, 0) = (0, 0)$ , det ger  $\text{grad} f(0, 0) \bullet \mathbf{v} = 0$ , men  $f'_\mathbf{v}(0, 0) \neq \text{grad} f(0, 0) \bullet \mathbf{v}$  för t.ex.  $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$  och det ger att  $f$  inte är differentierbar i origo; det följer även av att  $f$  inte är kontinuerlig i origo: t.ex.  $f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq f(0, 0)$  då  $y \rightarrow 0$ .

|   |
|---|
| <b>svar:</b> $f'_\mathbf{v}(0, 0) = \text{grad} f(0, 0) \bullet \mathbf{v}$ gäller inte; $f$ är inte differentierbar i $(0, 0)$ |
|---|