Matematik CTH&GU

Tentamensskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2007-08-28, kl. 14.00-18.00 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Bernhard Behrens, tel. 0768-681630
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

==

1. Låt $F(x,y) = 8x^3 + 6xy + y^3$.

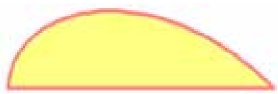
a) Bestäm alla stationära punkter till F och deras karaktär. (6p)

b) Visa att nivåkurvan $F(x,y)=1$ lokalt kring punkten $(1,-1)$ är en funktionskurva $y = f(x)$ och bestäm $f'(1)$. (3p)

2. Låt $\mathbb{F} = (\cos(x)\cos(y), -\sin(x)\sin(y))$
och $C: \boldsymbol{r} = (-\cos(t)\cosh(t),\ \sin(t)\sinh(t)),\ 0 \xrightarrow{t} \pi$.

a) Är $\mathbb{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^2$? Om ja, bestäm en potential till $\mathbb{F}$ i $\mathbb{R}^2$. (4p)

b) Beräkna $\int_C \mathbb{F} \bullet d\boldsymbol{r}$. (3p)



c) Beräkna arean av området mellan C och x-axeln. (4p)

3. Låt $f(x,y) = 1 - |xy|$ och $D: x^2 + y^2 \le 1$.

a) Beräkna volymen av kroppen $K = \{(x,y,z):\ (x,y) \in D, 0 \le z \le f(x,y)\}$. (5p)

b) Beräkna arean av ytan $Y: z = f(x,y),\ (x,y) \in D$. (5p)

c) Är f differentierbar i origo? (5p)

4. Låt $\mathbb{F}(x,y,z) = \left(\cos x,\ x^2 y \cos z + (y+z)\sin x, -x^2 \sin z\right)$ vara hastighetsvektorn för en stationär strömning av en inkompressibel vätska.

a) Visa att $\mathbb{F}$ är källfritt (2p) och bestäm en vektorpotential $\boldsymbol{A}$ för $\mathbb{F}$ (5p)
(ledn.: ansätt $\boldsymbol{A}(x,y,z) = (p(x,y,z), 0,\ q(x,y,z))$). (7p)

b) Bestäm volymen av den vätskemängd som per tidsenhet strömmar nedåt genom ytan $Y: z = \left(\pi - \sqrt{x^2+y^2}\right) e^{-\frac{1}{4}\cos\sqrt{x^2+y^2}},\ \sqrt{x^2+y^2} \le \frac{\pi}{2}$. (6p)

5. a) Visa att om $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är deriverbar i en punkt $\boldsymbol{a}$ och antar i $\boldsymbol{a}$ ett extremvärde så är $\boldsymbol{a}$ en stationär punkt. (5p)

b) Formulera och bevisa en sats om derivering av en sammansatt funktion $f(x(t), y(t))$. (7p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB