Tentamen i flervariabelanalys för F1 (mve035), 07-08-28

uppg. 1

$F(x,y) = 8x^3 + 6xy + y^3$.

a) $\left.\begin{array}{l} F'_x = 24x^2 + 6y = 0 \\ F'_y = 6x + 3y^2 = 0 \end{array}\right\} \implies (-6xy =)\ 24x^3 = 3y^3$

$\implies 8x^3 - y^3 = (2x-y)\underbrace{\left(4x^2 + 2xy + y^2\right)}_{>0} = 0 \iff 2x = y$

$\underset{F'_x=0}{\implies} 4x^2 + 2x = 0 \implies x = 0$ eller $x = -\frac{1}{2}$,

det ger de stationära punkterna $\underline{(0,0)}$ och $\underline{\left(-\frac{1}{2}, -1\right)}$. Deras typ fås med den kvadratiska formen $Q(h,k) = F''_{xx}(a,b)\,h^2 + 2F''_{xy}(a,b)\,hk + F''_{yy}(a,b)\,k^2$:

	$(0,0)$	$\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$
$F''_{xx} = 48x$	0	-24
$F''_{xy} = 6$	6	6
$F''_{yy} = 6y$	0	-6

, det ger för $(0,0)$: $Q(h,k) = 12hk$ som är indefinit, $(0,0)$ är alltså en sadelpunkt (det inses även direkt!), för $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ fås $Q(h,k) = -24h^2 + 12hk - 6k^2 = -6\left((k-h)^2 + 3h^2\right)$ som är negativt definit, $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ är alltså en str. lokal maximipunkt.

b) $F(1,-1) = 1$ (punkten $(1,-1)$ ligger på nivåkurvan $F(x,y) = 1$), F är C^1 och $F'_y(1,-1) = 9 \neq 0$, implicita funktionssatsen ger då att

nivåkurvan $F(x,y) = 1$ lokalt kring $(1,-1)$ C^1-kurva $y = f(c)$, kedjeregeln ger $\frac{d}{dx}F(x, f(x)) = F'_x(x, f(x)) \cdot 1 + F'_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = \frac{d}{dx}1 = 0$ lokalt kring $(1,-1)$, alltså $\underline{f'(1)} = -\frac{F'_x(1,-1)}{F'_y(1.-1)} = -\frac{18}{9} = \underline{-2}$.

$\boxed{\textbf{svar: a) } (0,0)\text{: sadelpunkt, } \left(-\tfrac{1}{2}, -1\right)\text{: lok. maximipunkt} \quad \textbf{b) } f'(1) = -2}$

uppg. 2

$\boldsymbol{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = (\cos x \cos y, -\sin x \sin y)$, $\boldsymbol{F}$ är C^1.

a) $Q'_x = -\cos x \sin y = P'_y \underset{\mathbb{R}^2 \text{ bågv. shgd.}}{\implies}$ $\boldsymbol{F}$ är konservativt i $\mathbb{R}^2$. Alltså finns en potential Φ: $\Phi'_x = \cos x \cos y \Rightarrow \Phi = \sin x \cos y + g(y) \implies$

$\Phi'_y = -\sin x \sin y + g'(y) \overset{!}{=} -\sin x \sin y \implies g(y) = c$, alltså är

$\underline{\Phi(x,y) = \sin x \cos y}$ en potential.

b) C är en kurva från $\boldsymbol{r}(0) = (-1, 0)$ till $\boldsymbol{r}(\pi) = (\cosh \pi, 0)$, alltså är med potentialen från **a)** $\underline{\int_C \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{r}} = \Phi(\cosh\pi, 0) - \Phi(-1, 0) =$

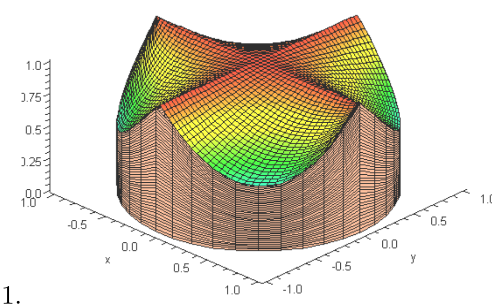
$= \underline{\sin(\cosh\pi) + \sin 1}.$

c) Arean av D = området mellan x-axeln och kurvan
$C: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (-\cos t\cosh t, \sin t\sinh t)),\ 0 \xrightarrow{t} \pi$ är
$m(D) = \underline{\iint_D dxdy} \underset{\text{Green}}{=} \frac{1}{2}\int_{\partial D} -ydx + xdy =$ [∂D moturs genoml.] $=$
$\left[\partial D = C + C_1 \text{ där } C_1 = \begin{cases} x = t, dx = dt \\ y = 0, dy = 0dt \end{cases},\ -1 \xrightarrow{t} \cosh\pi\right]$
$\frac{1}{2}\int_\pi^0 (-\sin t\sinh t(\sin t\cosh t - \cos t\sinh t) - \cos t\cosh t(\cos t\sinh t + \sin t\cosh t))\, dt =$
[trigonometriska resp. hyperboliska ettan] $= 0 + \frac{1}{2}\int_0^\pi (\sinh t\cosh t + \sin t\cos t)\, dt =$
$= \frac{1}{4}\left[\sinh^2 t + \sin^2 t\right]_0^\pi = \underline{\frac{\sinh^2\pi}{4}}.$ Alternativt:
$m(D) = \int_{-1}^{\cosh\pi} y(x)\, dx$ med subst. $x = -\cos t\cosh t,\ y = \sin t\sinh t$...

svar:

$\boxed{\textbf{a) } \boldsymbol{F} \text{ är konservativt med potential } \sin x\cos y \quad \textbf{b) } \sin(\cosh\pi) + \sin 1 \quad \textbf{c) } \frac{\sinh^2\pi}{4}}$

uppg. 3



$f(x, y) = 1 - |xy|,\quad D: x^2 + y^2 \leq 1.$

Sätt $D^+: x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0$ och beakta symmetrin!

a) Volymen av kroppen $K: (x, y) \in D,\ 0 \leq z \leq f(x, y)$ är $[f(x, y) > 0$ på $D]$
$4\iint_{D^+} f(x, y)\, dxdy = 4\iint_{D^+} (1 - xy)\, dxdy =$ [pol. koord.] $=$
$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \left(1 - r^2\cos\varphi\sin\varphi\right) rdrd\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cos\varphi\sin\varphi\right) d\varphi =$
$= \left[2\varphi - \frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\pi - \frac{1}{2}}.$

b) Arean av ytan $Y: z = f(x, y), (x, y) \in D$ är

$$4\iint\limits_{D^+}\sqrt{1+\left(f'_x(x,y)\right)^2+\left(f'_y(x,y)\right)^2}\,dxdy=$$

$$=4\iint\limits_{D^+}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy=[\text{pol. koord.}]=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\sqrt{1+r^2}\,r\,dr\,d\varphi=$$

$$=4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left[\frac{1}{3}\left(1+r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\underline{\frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)}.$$

c) Vi kollar först om de partiella derivatorna existerar i origo:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\frac{1-1}{x}=0\xrightarrow{x\to0}0=f'_x(0,0)\\ \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\frac{1-1}{y}=0\xrightarrow{y\to0}0=f'_y(0,0)\end{array}\right\}\ f\text{ är alltså partiellt deriverbar}$$

i origo; då kollar vi om f är differentierbar i origo, dvs. om det relativa felet

$$\rho(x,y)=\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1-|xy|-1-0-0}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

går mot 0 då $(x,y)\to(0,0)$:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\rho(x,y)=\lim\limits_{r\to0}\rho(r\cos\varphi,r\sin\varphi)=\lim\limits_{r\to0}\frac{-r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r}=0$, det ger att f är differentierbar i origo.

$$\boxed{\textbf{svar: a) } \pi-\frac{1}{2}\qquad \textbf{b) } \frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)\qquad \textbf{c) } \text{ja}}$$

uppg. 4

$\mathbb{F}(x,y,z)=\left(\cos x,x^2y\cos z+(y+z)\sin x,-x^2\sin z\right)$, $\mathbb{F}$ är C^1.

a) $div\mathbb{F}=\frac{\partial}{\partial x}\cos x+\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y\cos z+(y+z)\sin x\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-x^2\sin z\right)=$
$=-\sin x+x^2\cos z+\sin x-x^2\cos z=0$, $\mathbb{F}$ är alltså källfritt och har därmed en vektorpotential $\mathbb{A}$, dvs. $\mathbb{F}=rot\mathbb{A}$; med $\mathbb{A}=(p,0,q)$ skall
$\left(\cos x,x^2y\cos z+(y+z)\sin x,-x^2\sin z\right)=\left(q'_y,p'_z-q'_x,-p'_y\right)$:

$$\left\{\begin{array}{l} q'_y=\cos x\implies q=y\cos z+h(x,z)\\ p'_z-q'_x=x^2y\cos z+y\sin x+z\sin x\\ -p'_y=-x^2\sin z\implies p=x^2y\sin z+g(x,z)\end{array}\right.$$

$\implies p'_z-q'_x=x^2y\cos z+g'_z+y\sin z-h'_x\overset{!}{=}x^2y\cos z+y\sin x+z\sin x$
$\implies g'_z-h'_x=z\sin x$, det är uppfyllt om vi t. ex. väljer
$g\equiv0$ och $h(x,z)=z\cos x$, det ger $\underline{\mathbb{A}=\left(x^2y\sin z,0,(y+z)\cos x\right)}$.

b) Eftersom $div\mathbb{F}=0$ vill vi helst aväanda Gauss: Betrakta kroppen
$K=\left\{(x,y,z):x^2+y^2\le\frac{\pi^2}{4},\frac{\pi}{2}\le z\le f(x,y)\right\}$ där
$f(x,y)=\left(\pi-\sqrt{x^2+y^2}\right)e^{-\frac{1}{4}\cos\sqrt{x^2+y^2}}$: Flödet in i K är ($\boldsymbol{n}$ = normalen inåt K) $\iint\limits_{\partial K}\mathbb{F}\bullet\boldsymbol{n}dS=\iint\limits_{Y\cup D}\mathbb{F}\bullet\boldsymbol{n}dS\underset{\text{Gauss}}{=}-\iiint\limits_K div\mathbb{F}dxdydz=0$ där
$D=\left\{(x,y,z):x^2+y^2\le\frac{\pi^2}{4},z=\frac{\pi}{2}\right\}$, flödet av $\mathbb{F}$ nedåt genom Y är alltså
$\iint\limits_Y\mathbb{F}\bullet\boldsymbol{n}dS=-\iint\limits_{D'}\mathbb{F}\bullet(0,0,1)\,dxdy=$ [med $D'=\left\{(x,y):x^2+y^2\le\frac{\pi^2}{4}\right\}$]
$=-\iint\limits_{D'}\left(\cos x,x^2y\cos\frac{\pi}{2}+\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\sin x,-x^2\sin\frac{\pi}{2}\right)\bullet(0,0,1)\,dxdy=$

$= \iint\limits_{D'} x^2 dxdy =$ [pol. koord.] $= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2 r\varphi\, dr d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \frac{1+\cos(2\varphi)}{2} dr d\varphi =$

$= \pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{\pi^5}{64}}.$

Alternativt kan flödet beräknas med **a)**: $\iint\limits_Y \mathbb{F}\bullet \boldsymbol{n} dS = \iint\limits_Y rot\mathbb{A}\bullet\boldsymbol{n}dS \underset{\text{Stokes}}{=}$

$= \int\limits_{\partial Y} \mathbb{A}\bullet d\boldsymbol{r}$ där $\partial Y: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) = \left(\frac{\pi}{2}\cos t, \frac{\pi}{2}\sin t, \frac{\pi}{2}\right),\ 2\pi \xrightarrow{t} 0,$

flödet är alltså $\int\limits_C \mathbb{A}\bullet d\,\boldsymbol{r} =$

$$= \int\limits_{2\pi}^{0} \left(\left(\frac{\pi}{2}\cos t\right)^2 \frac{\pi}{2}\sin t \sin\frac{\pi}{2}, 0, \left(\frac{\pi}{2}\sin t+\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}\right)\bullet\left(-\frac{\pi}{2}\sin t, \frac{\pi}{2}\cos t, 0\right)dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\cos^2 t\sin^2 t\,dt = \frac{\pi^4}{64}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2(2t)\,dt = \frac{\pi^4}{64}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\cos(4t)}{2}dt = \underline{\frac{\pi^5}{64}}.$$

$$\boxed{\textbf{svar: a) } \mathbb{A}=\left(x^2y\sin z,0,(y+z)\cos x\right) \quad \textbf{b) } \frac{\pi^5}{64}}$$

Ytan ser ut så här: