Matematik CTH&GU

Tentamensskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2008-01-17, kl. 8.30-12.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Jonas Hartwig, tel. 0762-721860
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

==

1. Låt $f(x,y) = xy + e^{x^4 - y^3}\sin\left(x^2 + y^2\right)$.

a) Bestäm Taylorpolynomet av ordningen 5 i origo till f. (4p)

b) Visa att origo är en stationär punkt till f och bestäm dess typ. (4p)

c) Visa att ekvationen $z = f(x,y)$ lokalt kring punkten $(1, 0, e\sin 1)$ definierar y som en differentierbar funktion av (x,z). (2p)

2. Betrakta kraftfältet $\mathbb{F}(x,y) = \left(x^2 + y^2 + x\ln\left(1+y^2\right), \dfrac{x^2 y}{1+y^2}\right)$ och kurvorna

$C_1: y = \frac{1}{2}x^2 - 2,\ -2 \xrightarrow{x} 2$ och $C_2: y = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right),\ 2 \xrightarrow{x} -2$.

a) Är $\mathbb{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^2$? (3p)

b) Beräkna det arbete som $\mathbb{F}$ uträttar då en partikel förflyttas längs kurvan $C = C_1 + C_2$. (6p)

3. Lös differentialekvationen

$\left(x - y + xy^2z^2\right)dx + \left(y - x + x^2yz^2\right)dy + \left(z + x^2y^2z\right)dz = 0$. (7p)

4. Vilka värden kan $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$ anta? (7p)

5. Låt $f(x,y) = -\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \le 1\right\}$.

a) Beräkna volymen av kroppen $K = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, 0 \le z \le f(x,y)\}$. (6p)

b) Beräkna arean av ytan $Y = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, z = f(x,y)\}$. (6p)

6. **a)** Vad menas med att ett fält $\mathbb{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ är differentierbar i en punkt $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m$? (3p)

b) Formulera Stokes sats. (3p)

c) Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vara differentierbar i en punkt $\boldsymbol{a}$ med $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \ne \boldsymbol{0}$. Visa att $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})$ är den riktning i vilken f växer snabbast då man rör sig från punkten $\boldsymbol{a}$. (5p)

d) Visa att ett C^1–fält i $\mathbb{R}^3$ som har en vektorpotential i $\mathbb{R}^3$ är källfritt i $\mathbb{R}^3$. (4p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB