Tentamensskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2006-03-10, kl. 8.30-12.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Johan Jansson, tel. 0762-721860
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

==

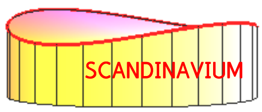
1. Låt $f(x,y)=x^4+y^4-4xy-6$.

a) Ange en ekvation för tangentplanet till ytan $z=f(x,y)$ i punkten $(1,2,3)$. (5p)

b) Bestäm riktningsderivatan av f i punkten $(1,2)$ i riktningen $(2,1)$. (3p)

c) Bestäm alla stationära punkter till f och deras karaktär. (7p)

2. Scandinavium K i Göteborg definieras (i lämpligt koordinatsystem) av olikheterna $0\le z\le 15+\frac{x^2}{500}$, $x^2+y^2\le 2500$.



a) Beräkna volymen av K. (6p)

b) Beräkna arean av Scandinaviums yttervägg
[Scandinaviums yttervägg är ytan $\{(x,y,z): x^2+y^2=2500,\ 0\le z\le 15+\frac{x^2}{500}\}$]. (6p)

c) Beräkna flödet av $\boldsymbol{v}=(x,y,2z)$ ut ur Scandinavium genom tak och yttervägg
[Scandinaviums tak är ytan $\{(x,y,z): x^2+y^2\le 2500,\ z=15+\frac{x^2}{500}\}$]. (5p)

d) Klockan 12 en vacker vårdag var temperaturen på och kring Scandinaviums tak
$T(x,y,z)=10^{-3}\left(y^2-xy+500z\right)$ [$^{\circ}$ Celsius].
Mellan vilka värden varierade temperaturen på K:s tak då? (7p)

3. Låt $$\mathbb{F}=\left(\frac{1}{1+(x-y)^2}, \frac{y+z}{1+(y+z)^2}-\frac{1}{1+(x-y)^2}, \frac{y+z}{1+(y+z)^2}\right).$$

Visa att $\mathbb{F}$ är konservativt i $\mathbb{R}^3$ och beräkna det arbete som $\mathbb{F}$ uträttar längs kurvan $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=(e^{\cos 2t}, e^{\sin 2t}, -\cos t),\ 0\xrightarrow{t}\pi$. (8p)

4. **a)** Definiera differentialen av ett fält $\mathbb{F}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ i en punkt $\boldsymbol{a}$. (3p)

b) Formulera Stokes' sats. (3p)

5. Formulera och bevisa en formel för derivering av en sammansatt funktion $f(x(t),y(t))$. (7p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

<u>Tentamensskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2006-08-30, kl. 14.00-18.00 i V</u>

<u>Hjälpmedel</u>: Inga, ej heller räknedosa
<u>Telefon</u>: Jonatan Vasilis, tel. 0762-721860
<u>OBS:</u> Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på <u>varje</u> inlämnat blad du vill ha rättat.

==

1. Funktionen $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är C^1. Visa att funktionen $h(x,y,z) = zf\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)$ satisfierar differentialekvationen $xh'_x + yh'_y + zh'_z = h$. (7p)

2. Låt $f(x,y) = (x-x^2)(y-y^2)$.

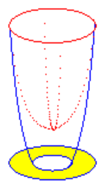
a) Bestäm alla stationära punkter till f och deras karaktär. (8p)

b) Vilka värden antar $f(x,y)$ på $D = \{(x,y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$? (3p)

3. Beräkna arean av ytan $Y: \begin{cases} x = u^2 \\ y = 2uv, \quad 0 \le u \le 2, 0 \le v \le 1; \\ z = 2v^2 \end{cases}$ (7p)

ange även en ekvation för tangentplanet till ytan Y i punkten $\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$. (2p) (9p)

4. En vas definieras av olikheterna $0 \le 3e^{x^2+y^2} - 4 \le 2z \le 2e^{x^2+y^2}$.



a) Hur mycket vatten ryms i vasen? (4p)

b) Beräkna vasens totala massa då dess densitet är $\rho(x,y,z) = 1$. (4p)

5. Låt $\mathbb{F} = \left(ye^{\cos x},\ xe^{\sin z}, y(z+1)e^{\cos x}\sin x\right)$.

a) Har $\mathbb{F}$ en potential i $\mathbb{R}^3$? (3p)

b) Har $\mathbb{F}$ en vektorpotential $\mathbb{R}^3$? (3p)

c) Beräkna flödet av $\mathbb{F}$ uppåt genom ytan $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$ i uppgift 2. (6p)

6. **a)** Formulera och bevisa Green's sats. (8p)

b) Låt $\mathbb{F}$ vara ett virvelfritt C^1-fält i $\mathbb{R}^3$. Visa $\int_C \mathbb{F} \bullet d\boldsymbol{r}$ är oberoende av vägen. (5p)

Betygsgränser:

24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

Tentamensskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2007-01-19, kl. 8.30-12.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Micke Persson, tel. 0762-721860; Lennart Falk, tel. 0760-721861
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

==

1. Låt $f(x,y)=x^2+y^2-2y$.

a) Ange en ekvation för tangentplanet till ytan $z=f(x,y)$ i punkten $(1,2,1)$. (4p)

b) Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(1,2)$ i riktningen $(2,1)$. (3p)

c) Beräkna arean av ytan $Y: z=f(x,y),\ x^2+(y-1)^2\le 2$. (7p)

2. Låt $u=2x^3-3y^2, v=3x^2+2y^3$ och $\Omega=\{(x,y):\ x>0, y>0\}$. Visa att tillordningen $(x,y)\mapsto(u,v)$ är bijektiv lokalt i varje punkt i Ω (2p) och lös problemet

$y^2 f'_x - x f'_y = \dfrac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(x,y)},\ f(x,x)=24x^3,\ (x,y)\in\Omega$ (6p). [tips: använd u,v som nya variabler] (8p)

3. Beräkna massan av kroppen $K=\left\{(x,y,z): \sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{8-x^2-y^2}\right\}$,

då dess densitet är $\rho(x,y,z)=|xyz|$. (7p)

4. Vilka värden antar potentialen $\Phi(x,y,z)=6xy-z^3$ på sfären $x^2+y^2+z^2=5$? (8p)

5. Låt $\mathbb{F}=\left(3x^2y^2+\frac{\sin x}{1+x^2},\ 2y\left(x^3+e^{-y^4}\right)\right)$.

a) Är $\mathbb{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^2$? (2p)

b) Beräkna det arbete som $\mathbb{F}$ uträttar då en partikel förflyttas från $(-2,2)$ till $(2,-2)$ medurs längs ellipsen $2x^2+3y^2=20$. (5p)

6. **a)** Formulera och bevisa Gauss' sats. (8p)

b) Beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$. (4p)

c) Visa att ett konservativt fält som är C^1 i $\mathbb{R}^3$ är virvelfritt i $\mathbb{R}^3$. (4p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

Tentamensskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2007-03-16, kl. 8.30-12.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Karin Kraft, tel. 0762-721860
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

1. Låt $F(x,y,z)=(\ln(x)+xz)\cos(y)\arctan(y+z)$.

a) Visa att nivåytan $F(x,y,z)=\frac{\pi}{4}$ lokalt kring punkten $(1,0,1)$ är en C^1-funktionsyta $z=f(x,y)$ och bestäm $f'_x(1,0)$ och $f'_y(1,0)$. (4p)

b) Ange en ekvation för tangentplanet till nivåytan $F(x,y,z)=\frac{\pi}{4}$ i punkten $(1,0,1)$. (4p)

c) I vilken riktning växer funktionsvärdena $F(x,y,z)$ snabbast i punkten $(1,0,1)$? (2p)

2. Beräkna arean av ytan $Y:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=\left(u^2, 2v\sin(u), 2v\cos(u)\right),\ v\geq 0,\ u^2+v^2\leq 1$. (7p)

3. Bestäm de högsta och de lägsta punkterna på skärningskurvan mellan cylindern $x^2+y^2=1$ och funktionsytan $z=xy^2$. (7p)

4. Kroppen $K=\left\{(x,y,z): z\geq\sqrt{x^2+y^2}\right\}$ har densiteten $\rho(x,y,z)=\frac{1}{z^2\left(1+x^2+y^2+z^2\right)}$.
Bestäm K:s totala massa. (7p)

5. Låt $\mathbb{F}=\left(e^{x^2+y^2}\cos(z),\ (x+y)e^{z^2},\ e^{xyz}\right)$ och $f(x,y)=\sqrt{e-e^{x^2+y^2}}\cosh(\cos(x+2y))$.

a) Beräkna flödet av $\operatorname{rot}\mathbb{F}$ uppåt genom funktionsytan $z=f(x,y),\ (x,y)\in D_f$

a1) med Stokes' sats **a2)** med Gauss' sats (6p var). (12p)

b) Är $\mathbb{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^3$? (2p)

6. a) Formulera och bevisa Greens sats. (8p)

b) Definiera enkel kurva och enkelt sammanhängande mängd i $\mathbb{R}^2$. (3p)

c) Visa att ett fält som är C^1 och har en vektorpotential i $\mathbb{R}^3$ är källfritt i $\mathbb{R}^3$. (4p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

Tentamensskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2007-08-28, kl. 14.00-18.00 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Bernhard Behrens, tel. 0768-681630
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

==

1. Låt $F(x,y)=8x^3+6xy+y^3$.

a) Bestäm alla stationära punkter till F och deras karaktär. (6p)

b) Visa att nivåkurvan $F(x,y)=1$ lokalt kring punkten $(1,-1)$ är en funktionskurva $y=f(x)$ och bestäm $f'(1)$. (3p)

2. Låt $\mathbb{F}=(\cos(x)\cos(y),-\sin(x)\sin(y))$
och $C:\boldsymbol{r}=(-\cos(t)\cosh(t),\ \sin(t)\sinh(t)),\ 0\xrightarrow{t}\pi$.

a) Är $\mathbb{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^2$? Om ja, bestäm en potential till $\mathbb{F}$ i $\mathbb{R}^2$. (4p)

b) Beräkna $\int_C \mathbb{F}\bullet d\boldsymbol{r}$. (3p)

c) Beräkna arean av området mellan C och x-axeln. (4p)

3. Låt $f(x,y)=1-|xy|$ och $D:x^2+y^2\le 1$.

a) Beräkna volymen av kroppen $K=\{(x,y,z):\ (x,y)\in D, 0\le z\le f(x,y)\}$. (5p)

b) Beräkna arean av ytan $Y:z=f(x,y),\ (x,y)\in D$. (5p)

c) Är f differentierbar i origo? (5p)

4. Låt $\mathbb{F}(x,y,z)=\left(\cos x,\ x^2y\cos z+(y+z)\sin x, -x^2\sin z\right)$ vara hastighetsvektorn för en stationär strömning av en inkompressibel vätska.

a) Visa att $\mathbb{F}$ är källfritt (2p) och bestäm en vektorpotential $\boldsymbol{A}$ för $\mathbb{F}$ (5p) (ledn.: ansätt $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(p(x,y,z),0,\ q(x,y,z))$). (7p)

b) Bestäm volymen av den vätskemängd som per tidsenhet strömmar nedåt genom ytan $Y:z=\left(\pi-\sqrt{x^2+y^2}\right)e^{-\frac{1}{4}\cos\sqrt{x^2+y^2}},\ \sqrt{x^2+y^2}\le\frac{\pi}{2}$. (6p)

5. **a)** Visa att om $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ är deriverbar i en punkt $\boldsymbol{a}$ och antar i $\boldsymbol{a}$ ett extremvärde så är $\boldsymbol{a}$ en stationär punkt. (5p)

b) Formulera och bevisa en sats om derivering av en sammansatt funktion $f(x(t),y(t))$. (7p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

Tentamensskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2008-01-17, kl. 8.30-12.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon:, tel. 0762-721860
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

==

1. Låt $f(x,y) = xy + e^{x^4 - y^3}\sin\left(x^2+y^2\right)$.

a) Bestäm Taylorpolynomet av ordningen 5 i origo till f. (4p)

b) Visa att origo är en stationär punkt till f och bestäm dess typ. (4p)

c) Visa att ekvationen $z = f(x,y)$ lokalt kring punkten $(1,0,e\sin 1)$ definierar y som en differentierbar funktion av (x,z). (2p)

2. Betrakta kraftfältet $\mathbb{F}(x,y) = \left(x^2+y^2+x\ln\left(1+y^2\right), \dfrac{x^2 y}{1+y^2}\right)$ och kurvorna

$C_1 : y = \frac{1}{2}x^2 - 2,\ -2 \xrightarrow{x} 2$ och $C_2 : y = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right),\ 2 \xrightarrow{x} -2$.

a) Är $\mathbb{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^2$? (3p)

b) Beräkna det arbete som $\mathbb{F}$ uträttar då en partikel förflyttas längs kurvan $C = C_1 + C_2$. (6p)

3. Lös differentialekvationen

$\left(x - y + xy^2z^2\right)dx + \left(y - x + x^2yz^2\right)dy + \left(z + x^2y^2z\right)dz = 0$. (7p)

4. Vilka värden kan $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$ anta? (7p)

5. Låt $f(x,y) = -\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2+y^2 \le 1\right\}$.

a) Beräkna volymen av kroppen $K = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, 0 \le z \le f(x,y)\}$. (6p)

b) Beräkna arean av ytan $Y = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, z = f(x,y)\}$. (6p)

6. a) Vad menas med att ett fält $\mathbb{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ är differentierbar i en punkt $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m$? (3p)

b) Formulera Stokes sats. (3p)

c) Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vara differentierbar i en punkt $\boldsymbol{a}$ med $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \neq \boldsymbol{0}$. Visa att $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})$ är den riktning i vilken f växer snabbast då man rör sig från punkten $\boldsymbol{a}$. (5p)

d) Visa att ett C^1–fält i $\mathbb{R}^3$ som har en vektorpotential i $\mathbb{R}^3$ är källfritt i $\mathbb{R}^3$. (4p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

SVAR:

06-03-10:	**1a)** $4x-28y+z+49=0$ **b)** $4\sqrt{5}$ **c)** $(0,0)$ (sadelpunkt), $\pm(1,1)$ (lok. minimipunkter) **2a)** 40625π **b)** 1750π **c)** 162500π **d)** $V_T=[7.5^\circ, 11.25^\circ]$ **3)** $\ln\sqrt{5}$
06-08-30:	**2a)** $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ sadelpunkter, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ str. lok. maximipunkt **b)** $V_f=[0,\frac{1}{16}]$ **3)** arean är 16, tangentplan: $x-2y+2z=0$ **4a)** $\pi(8\ln 2-3)$ **b)** $\pi(2\ln 3-1)$ **5a)** nej **b)** ja **c)** $\frac{1}{2}\left(e-e^{\cos 1}\right)$
07-01-19:	**1a)** $2x+2y-z=5$ **b)** $\frac{6}{\sqrt{5}}$ **c)** $\frac{13\pi}{3}$ **2)** $f(x,y)=12\left(x^3+y^3\right)+18\left(x^2-y^2\right)$ **3)** $\frac{32}{3}$ **4)** $[-15,15]$ **5a)** ja **b)** 64
07-03-16:	**1a)** $f_x'(1,0)=\frac{-2\pi}{2+\pi}$, $f_y'(1,0)=\frac{-2}{2+\pi}$ **b)** $2\pi x+2y+(\pi+2)z=2+3\pi$ **c)** $(2\pi,\ 2,\ 2+\pi)$ **2)** $\frac{4\pi}{3}$ **3)** $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\pm\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{-2}{3\sqrt{3}}\right)$ resp. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ **4)** $\left(\sqrt{2}-1\right)\pi^2$ **5a)** π **b)** nej
07-08-28:	**1a)** $(0,0)$ (sadelpunkt), $(\frac{-1}{2},-1)$ (lok. maximipunkt) **b)** $f'(1)=-2$ **2a)** ja, potential $\Phi(x,y)=\sin x\cos y$ **b)** $\sin 1+\sin(\cosh\pi)$ **c)** $\left(\frac{\sinh\pi}{2}\right)^2$ **3a)** $\pi-\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{2(2\sqrt{2}-1)\pi}{3}$ **c)** ja **4a)** $\left(x^2y\sin z, 0, (y+z)\cos x\right)$ **b)** $\frac{\pi^5}{64}$
08-01-17:	**1a)** $x^2+xy+y^2-x^2y^3-y^5$ **b)** lok. minimipunkt **2a)** nej **b)** $\frac{98}{15}$ **3)** $(x-y)^2+z^2+(xyz)^2=c$ **4)** $[-1,1]$ **5a)** $\frac{\pi}{2}$ **b)** $\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\pi$

Variation på uppgift 4 (08-01-17):

Bestäm värdemängden till $f(x,y)=xy-x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}$.

svar: $V_f=\left[-\sqrt{2},\phi\right]$ där $\phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (gyllene snittet: det största värde som *f* antar är ϕ)

Cylindern och funktionsytan i uppgift 3 (07-03-16):