Tentamen i flervariabelanalys för F1 (mve035), 07-01-19

uppg. 1

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y \Rightarrow \mathrm{grad} f(x,y) = (2x, 2y-2) \Rightarrow \underline{\mathrm{grad} f(1,2) = (2,2)}$.

a) Tangentplanet har ekv. $z = f(1,2) + f'_x(1,2)(x-1) + f'_y(1,2)(y-2) =$
$= 1 + 2x - 2 + 2y - 4$ dvs. $\underline{2x + 2y - z = 5}$.

b) Riktningsenhetsvektorn är $\boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$, riktningsderivatan alltså
$f'_{\boldsymbol{v}}(1,2) = \mathrm{grad} f(1,2) \bullet \boldsymbol{v} = (2,2) \bullet \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1) = \underline{\frac{6}{\sqrt{5}}}$.

c) Arean är $A = \iint\limits_D \sqrt{1 + (f'_x(x,y))^2 + \left(f'_y(x,y)\right)^2}\,dxdy =$
$= \iint\limits_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4(y-1)^2}\,dxdy$ där $D: x^2 + (y-1)^2 \le 2$;
med polära koordinater $x = r\cos\varphi$, $y - 1 = r\sin\varphi$ blir det
$A = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4r^2}\; r dr d\varphi = 2\pi \left[\frac{1}{12}\left(1+4r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{6}(27-1) = \underline{\frac{13\pi}{3}}$.

svar: a) $2x + 2y - z = 5$	**b)** $\frac{6}{\sqrt{5}}$	**c)** $\frac{13\pi}{3}$

uppg. 2

$\begin{cases} u = 2x^3 - 3y^2 \\ v = 3x^2 + 2y^3 \end{cases}$, $\Omega = \{(x,y) : x > 0,\ y > 0\}$.

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x^2 & -6y \\ 6x & 6y^2 \end{vmatrix} = 36\left(x^2y^2 + xy\right) > 0 \text{ för } (x,y) \in \Omega.$$

Eftersom u, v är C^1 i Ω så ger inversa funktionssatsen att tillordningen $(x,y) \mapsto (u,v)$ är lokalt bijektiv i varje punkt i Ω. Kedjeregeln ger

$$\left.\begin{array}{r} f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = 6x^2 f'_u + 6x f'_v \\ f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = -6y f'_u + 6y^2 f'_v \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$y^2 f'_x - x f'_y = 6\left(x^2y^2 + xy\right) f'_u \overset{!}{=} 36\left(x^2y^2 + xy\right) \Rightarrow f'_u = 6 \Rightarrow$
$f(u,v) = 6u + g(u,v) \Rightarrow f(x,y) = 6\left(2x^3 - 3y^2\right) + g\left(3x^2 + 2y^3\right) \Rightarrow$
$f(x,x) = 12x^3 - 18x^2 + g\left(3x^2 + 2x^3\right) \overset{!}{=} 24x^3 \Rightarrow g\left(3x^2 + 2x^3\right) = 18x^2 + 12x^3 \Rightarrow$
$g(t) = 6t \Rightarrow f(x,y) = 6\left(2x^3 - 3y^2\right) + 6\left(3x^2 + 2y^3\right)$.

$$\boxed{f(x,y) = 12\left(x^3 + y^3\right) + 18\left(x^2 - y^2\right)}$$

uppg. 3

Kroppen $K = \left\{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{8-x^2-y^2}\right\}$ begränsas nedåt av konen $z=\sqrt{x^2+y^2}$ och uppåt av sfären $x^2+y^2+z^2=8$, skärningen mellan dessa är cirkeln $x^2+y^2=4$, $z=2$; densiteten är $\rho(x,y,z)=|xyz|$.
Massan är $M = \iiint\limits_K \rho(x,y,z)\,dxdydz =$[pga symmetri] $= 4\iiint\limits_{K_+} xyz\ dxdydz$
där $K_+ = \{(x,y,z)\in K : x\ge 0, y\ge 0\}$, alltså

$$M = 4\iint\limits_D \left(\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} xyzdz\right) dxdy = \left[D : \begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ x\ge 0,\ y\ge 0\end{cases}\right] =$$

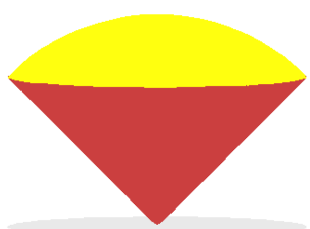
$$= 4\iint\limits_D xy\tfrac12\left(8-x^2-y^2-\left(x^2+y^2\right)\right)dxdy = \text{[pol. koord.]} =$$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^2 r^3\sin\varphi\cos\varphi\left(4-r^2\right)drd\varphi = [-\cos 2\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[r^4-\tfrac16 r^6\right]_0^2 = \underline{2\left(16-\tfrac{32}{3}\right)}.$$

Eller du räknar med rymdpolära koordinater r,θ,φ: $K'_+ : \begin{cases} 0 < r \le \sqrt{8} \\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{4} \\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$:

$$M = 4\iiint\limits_{K_+} xyz\ dxdydz = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\int\limits_0^{\sqrt{8}} r^3\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta r^2\sin\theta drd\theta d\varphi =$$

$$=4\left[\tfrac{r^6}{6}\right]_0^{\sqrt{8}}\left[\tfrac{\sin^4\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\tfrac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\tfrac{32}{3}}.$$



$\boxed{\textbf{svar: } \frac{32}{3}}$

uppg. 4

Lösning 1 (med Lagranges multiplikatormetod):

Vi söker det största/minsta värde som $\Phi = 6xy - z^3$ antar under bivillkoret $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-5=0$: $\text{grad}g = 2(x,y,z)\neq \mathbf{0}$ på sfären, alltså gäller för max/min-punkterna att $\text{grad}\Phi = \lambda\text{grad}g$ (Φ, g är C^1), dvs.

$$\begin{cases} (1) & 6y = 2\lambda x \\ (2) & 6x = 2\lambda y \\ (3) & -3z^2 = 2\lambda z \end{cases} \underset{x(1)-y(2)}{\Longrightarrow} 0 = \lambda\left(x^2 - y^2\right) \underset{\lambda\neq 0}{\Longrightarrow} x = y \text{ eller } x = -y:$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\text{fall 1: } x = y\text{:}} \quad x = y = 0 \underset{g=0}{\Longrightarrow} z = \pm\sqrt{5}, \\ \qquad xy \neq 0 \underset{(1)}{\Longrightarrow} \lambda = 3 \underset{(3)}{\Longrightarrow} -z^2 = 2z \\ \Longrightarrow z_{1/2} = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases} \underset{g=0}{\Longrightarrow} 2x^2 = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases} \end{array}\right\} \underset{(\text{kandid.})}{\text{ger}} \begin{cases} \pm\left(0,0,\sqrt{5}\right) \\ \pm\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right) \\ \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, -2\right) \\ \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}, -2\right) \end{cases}.$$

$$\underline{\text{fall 2: } x = -y}, \ xy \neq 0 \underset{(1)}{\Longrightarrow} \lambda = -3 \underset{(3)}{\Longrightarrow} z^2 = 2z \Longrightarrow z_{1/2} = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$$

$$\underset{g=0}{\Longrightarrow} 2x^2 = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases} \underset{(\text{kandidaterna})}{\text{och det ger}} \begin{cases} \pm\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, -\sqrt{\frac{5}{2}}, 0\right) \\ \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}, 2\right) \\ \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, 2\right) \end{cases}.$$

Då har vi allt: sfären $Y : x^2 + y^2 + z^2 = 5$ är kompakt, Φ är kontinuerlig, antar alltså ett största och ett minsta värde på Y och dessa måste finnas bland $\Phi\left(\pm\left(0,0,\sqrt{5}\right)\right) = \pm 5\sqrt{5}$, $\Phi\left(\pm\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \pm\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)\right) = \pm 15$, $\Phi\left(\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, -2\right)\right) = \Phi\left(\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}, -2\right)\right) = 11$, $\Phi\left(\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}, 2\right)\right) = \Phi\left(\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, 2\right)\right) = -11$. Det minsta värde resp. det största värde som Φ antar på Y är alltså -15 resp. 15 och eftersom Φ är kontinuerlig på Y och Y bågvis sammanhängande så antar Φ även alla värden mellan -15 och 15 (s.o.m.v.).

<u>Lösning 2</u>: lös ut $z = \pm\sqrt{5 - x^2 - y^2}$ ur bivillkoret och bestäm det största/minsta värde som $6xy \mp \left(5 - x^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}}$ antar på $D : x^2 + y^2 \leq 5$:

Vi räknar först med $z = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$ och $f(x,y) = 6xy - \left(5 - x^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}}$:

I) inre (stationära!) punkter:

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = 6y + 3x\left(5 - x^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \\ f'_y = 6x + 3y\left(5 - x^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \end{array}\right\} \underset{f'_x - f'_y}{\Longrightarrow} (y - x)\left(2 - \sqrt{5 - x^2 - y^2}\right) = 0:$$

fall 1: $x = y$: $f'_x = 3x\left(2 + \sqrt{5 - 2x^2}\right) = 0 \Longrightarrow x = 0$,det ger kandidaten $(0,0)$.

fall 2: $x \neq y$: $2 - \sqrt{5 - x^2 - y^2} = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 1 \underset{f'_x = 0}{\Longrightarrow} y = -x$, det ger

kandidaterna $\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

II) randpunkter: på randen $y = \pm\sqrt{5 - x^2}$, $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$ är

$f(x,y) = h(x) = \pm 6x\sqrt{5 - x^2} : h'(x) = \pm 6\left(\sqrt{5 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{5 - x^2}}\right) =$

$= \pm\frac{6}{\sqrt{5 - x^2}}\left(5 - 2x^2\right) = 0$, det ger kandidaterna $\pm\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

Helt analogt fås för $z = -\sqrt{5 - x^2 - y^2}$ och $g(x,y) = 6xy + \left(5 - x^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}}$ kandidaterna $(0,0)$ och $\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ (inre punkter), ingen skillnad på randen.

$f\ (g)$ är kontinuerlig på D, D är kompakt, alltså antar $f\ (g)$ på D ett största och ett minsta värde, dessa måste finnas bland $f\,(0,0) = \mp 5\sqrt{5}$, $f\,\left(\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right) = -11$, $g\,\left(\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right) = 11$, $f\,\left(\pm\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\right) = \pm 15$ och $f\left(\sqrt{5}, 0\right) = f\left(0, \sqrt{5}\right) = 0$. Eftersom $f\ (g)$ är kontinuerlig på D och D är bågvis sammanhängande så antar $f\ (g)$ även alla värden mellan -15 och 15.

Lösning 3: (enklast?) räkna med sfäriska koordinater $x = \sqrt{5}\sin\theta\cos\varphi$, $y = \sqrt{5}\sin\theta\sin\varphi$, $z = \sqrt{5}\cos\theta$: bestäm det största/minsta värde m/M som $F\,(\varphi,\theta) = 15\sin^2\theta\sin 2\varphi - 5\sqrt{5}\cos^3\theta$ antar på $D_0 : \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$.

F är kontinuerlig på D_0, D_0 är kompakt och bågvis sammanhängande, alltså är $V_\Phi = V_F = [m, M]$. Beräkning av m, M (som i lösning 2):

I) inre (stationära!) punkter:

$$\left.\begin{array}{l} F'_\varphi = 30\sin^2\theta\cos 2\varphi = 0 \\ F'_\theta = \frac{15}{2}\left(2\sin 2\varphi + \sqrt{5}\cos\theta\right)\sin 2\theta = 0 \end{array}\right\} \underset{\theta\neq 0,\pi}{\Longrightarrow} \begin{cases} \varphi \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\} \\ \theta = \frac{\pi}{2} \text{ eller } \theta = \arccos\frac{\mp 2}{\sqrt{5}} \end{cases}.$$

II) randpunkter:

$F(0,\theta) = F(2\pi,\theta) = -5\sqrt{5}\cos^3\theta$, $F\,(\varphi,0) = -5\sqrt{5}$, $F\,(\varphi,\pi) = 5\sqrt{5}$, minsta resp. största värde som F antar på randen är alltså $-5\sqrt{5}$ resp.$5\sqrt{5}$, alltså finns m, M bland $\pm 5\sqrt{5}$, $F\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) = F\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) = 15$, $F\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) = -15$, $F\left(\frac{\pi}{4}, \arccos\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = F\left(\frac{5\pi}{4}, \arccos\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = 5\left(3\left(1-\frac{4}{5}\right) + \frac{8}{5}\right) = 11$ och $F\left(\frac{3\pi}{4}, \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 5\left(-3\left(1-\frac{4}{5}\right) - \frac{8}{5}\right) = -11$, alltså $m = -15$ och $M = 15$.

$\boxed{\textbf{svar}\text{: } [-15, 15]}$

uppg. 5

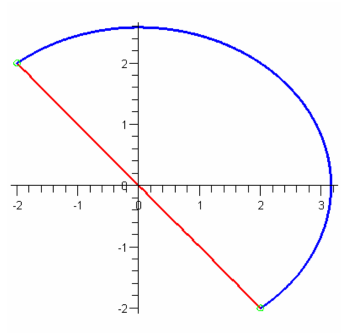
a) Fältet $\boldsymbol{F} = (P, Q) = \left(3x^2y^2 + \frac{\sin x}{1+x^2}, 2yx^3 + 2ye^{-y^4}\right)$ är C^2 i $\mathbb{R}^2$, $P'_y = 6x^2y = Q'_x$, alltså är $\boldsymbol{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^2$.

b) Vi kan inte ange en potential explicit (integralerna $\int \frac{\sin x}{1+x^2}dx$ och $\int ye^{-y^4}dy$ är ej elementära), men vi kan välja en enklare väg från $(-2,2)$ till $(2,-2)$, t. ex. sträckan $C : \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases}$, $-2 \xrightarrow{t} 2$; det sökta arbetet längs ellipsbågen är då lika med arbetet längs $C = \int\limits_C \boldsymbol{F} \bullet d\,\boldsymbol{r} = \int\limits_{-2}^{2} \boldsymbol{F}\,(\boldsymbol{r}\,(t)) \bullet \boldsymbol{r}'\,(t)\,dt =$

$= [\boldsymbol{r}'\,(t) = (1,-1)] = \int\limits_{-2}^{2}\left(3t^4 + \frac{\sin t}{1+t^2} + 2t^4 + 2te^{-t^4}\right)dt =$

$\left[\frac{\sin t}{1+t^2} \text{ och } te^{-t^4} \text{ är udda, } t^4 \text{ är jämn}\right] = 2\int\limits_0^2 5t^4dt = 2\left[t^5\right]_0^2 = \underline{64}$.

$\boxed{\text{svar: } \textbf{a)} \text{ ja} \quad \textbf{b)} \text{ 64}}$



2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2
3