Tentamen i flervariabelanalys för F1 (mve035), 08-01-17

uppg. 1

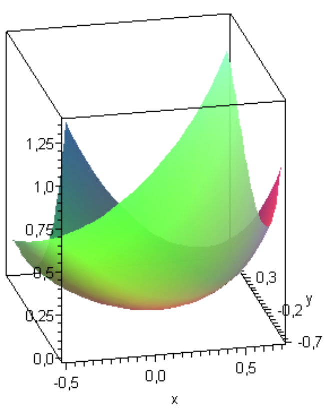
a) $f(x,y) = xy + e^{x^4-y^3}\sin(x^2+y^2)$;

$$\left.\begin{array}{l} e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}\ldots \underset{t=x^4-y^3}{\Longrightarrow} e^{x^4-y^3} = 1+x^4-y^3+\ldots \\ \sin t = t - \frac{t^3}{3!}+\ldots \underset{t=x^2+y^2}{\Longrightarrow} \sin(x^2+y^2) = x^2+y^2+\ldots \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\underline{f(x,y)} = xy + (1+x^4-y^3+\ldots)(x^2+y^2+\ldots) = \underline{xy+x^2+y^2-x^2y^3-y^5}\ldots$
(vi tog bara med termer t.o.m. ordningen 5).

b) Taylorpolynomets entydighet visar att $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, dvs. att origo är en stationär punkt och att $Q(h,k) = f''_{xx}(0,0) + 2f''_{xy}(0,0) + f''_{yy}(0,0) =$
$= h^2 + hk + k^2$. Den kvadratiska formen $Q(h,k) = \left(h+\frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}k^2$ är positivt definit, det ger att origo är en sträng lokal minimipunkt.

c) För $F(x,y,z) = z - f(x,y)$ gäller: punkten $(1,0,e\sin 1)$ ligger på nivåytan $F(x,y,z) \equiv 0$ och $F'_y(1,0,e\sin 1) = -f'_y(1,0) = -1 \neq 0$
$[f'_y(x,y) = x + e^{x^4-y^3}\left(2y\cos(x^2+y^2) - 3y^2\sin(x^2+y^2)\right)]$,
implicita funktionssatsen ger då påståendet. Ytan $z = f(x,y)$ nära origo:



$\boxed{\textbf{svar:a) } x^2+xy+y^2-x^2y^3-y^5 \quad \textbf{b) } \text{str.lok.minimipunkt}}$

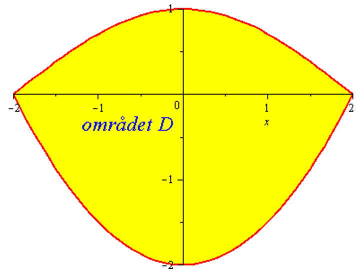
uppg. 2

$\boldsymbol{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = \left(x^2+y^2+x\ln(1+y^2), \frac{x^2y}{1+y^2}\right)$, $\boldsymbol{F}$ är C^1.

a) $P'_y(x,y) = 2y + \frac{2xy}{1+y^2} \neq \frac{2xy}{1+y^2} = Q'_x(x,y) \Longrightarrow$ $\boldsymbol{F}$ är inte konservativt.

b) $C_1 : y = \frac{x^2}{2} - 2,\ -2 \xrightarrow{x} 2,\ C_2 : y = \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right),\ 2 \xrightarrow{x} -2,$

kurvan $C = C_1 + C_2$ är en enkel, sluten kurva = den positivt orienterade randen ∂D till (det enkelt sammanhängande) området D, se figur:



för att beräkna arbetet av $\boldsymbol{F}$ längs C kan vi alltså använda *Green*:

$$\underline{\int\limits_C P dx + Q dy} = \iint\limits_D \left(Q'_x - P'_y\right) dxdy = \iint\limits_D (-2y)\, dxdy =$$

$$= \int\limits_{-2}^{2} \left(\int\limits_{\frac{x^2}{2}-2}^{\cos\frac{\pi x}{4}} (-2y)\, dy \right) dx = \text{[jämn funktion, symmetriskt intervall]} =$$

$$= 2\int\limits_0^2 \left(\left[-y^2\right]_{\frac{x^2}{2}-2}^{\cos\frac{\pi x}{4}} \right) dx = 2\int\limits_0^2 \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 + 4 - \frac{1+\cos\frac{\pi x}{2}}{2} \right) dx =$$

$$= 2\left[\frac{x^5}{20} - \frac{2x^3}{3} + \left(4 - \frac{1}{2}\right) x - \frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\pi} \right]_0^2 = 2\left(\frac{8}{5} - \frac{16}{3} + 7\right) = 2\left(\frac{8}{5} + \frac{5}{3}\right) = \underline{\frac{2\cdot 49}{15}}.$$

$\boxed{\textbf{svar: a) } \text{nej} \quad \textbf{b) } \frac{98}{15}}$

uppg. 3

$\boldsymbol{F} = (P, Q, R) = \left(x - y + xy^2z^2, y - x + x^2yz^2, z + x^2y^2z\right)$ är exakt ty rot$\boldsymbol{F} = \left(R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y\right) = (0, 0, 0)$, $\boldsymbol{F}$ har alltså en potential U, dvs. $\boldsymbol{F}$ =grad$U$ och då löser nivåytorna $U(x, y, z) = const$ det givna problemet $dU = U'_x dx + U'_y dy + U'_z dz = 0$:

$$\left.\begin{array}{l}
U'_z(x,y,z) = z + x^2y^2z \implies U(x,y,z) = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}x^2y^2z^2 + f(x,y) \implies \\
U'_y(x,y,z) = x^2yz^2 + f'_y(x,y) \stackrel{!}{=} y - x + x^2yz^2 \implies f'_y(x,y) = y - x \implies \\
f(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - xy + g(x) \implies U'_x(x,y,z) = xy^2z^2 - y + g'(x) \stackrel{!}{=} \\
\stackrel{!}{=} x - y + xy^2z^2 \implies g'(x) = x \implies g(x) = \frac{1}{2}x^2 + c
\end{array}\right\}$$

$$\implies \underline{U(x,y,z) = \frac{1}{2}\left(z^2 + x^2y^2z^2 + y^2 - 2xy + x^2\right)}.$$

$\boxed{\textbf{svar: } (x-y)^2 + z^2 + x^2y^2z^2 = c}$

uppg. 4

Vi sätter $f(x,y) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$, f :s definitionsmängd är $D_f = \{(x,y) : |x| \le 1, |y| \le 1\}$, D_f är kompakt, f är kontinuerlig, antar alltså på D_f ett minsta värde m och ett största värde M och f:s värdemängd är då $V_f = [m, M]$ ty D_f är bågvis sammanhängande (s.o.m.v.).

I. <u>Inre punkter</u> (f är partiellt deriverbar i det inre av D, inre extrempunkter är alltså stationära):

$$\begin{cases} f'_x = \sqrt{1-y^2} - \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \\ f'_y = \sqrt{1-x^2} - \frac{xy}{\sqrt{1-y^2}} = 0 \end{cases} \iff \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = xy \ \ (>0)$$

$\underset{\text{kvadrera}}{\iff} 1 + x^2y^2 - y^2 - x^2 = x^2y^2$, alla punkter på cirkeln $x^2+y^2=1$ i första och tredje kvadranten ($xy>0$) är alltså stationära.

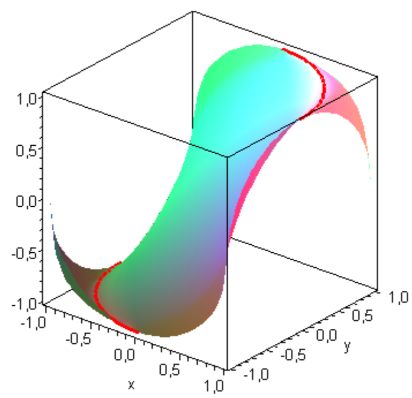
I dessa punkter är $f(x,y) = \begin{cases} f\left(x, \sqrt{1-x^2}\right) = x^2 + 1 - x^2 & \text{då } x>0 \\ f\left(x, -\sqrt{1-x^2}\right) = -x^2 - 1 + x^2 & \text{då } x<0 \end{cases}$,

minsta/största värdet som f antar i dessa punkter är alltså ∓ 1.

II. <u>Randpunkter</u>:

$$\left.\begin{array}{l} x = \pm 1: \ \ f(\pm 1, y) = \pm\sqrt{1-y^2} \\ y = \pm 1: \ \ f(x, \pm 1) = \pm\sqrt{1-x^2} \end{array}\right\}: \text{minsta/största vårde är } \mp 1. \text{ Alltså}$$

$\boxed{\textbf{svar: } V_f = [-1, 1]}$ så ser ytan $z = f(x,y)$ ut:



uppg. 5

$f(x,y) = -\ln\sqrt{x^2+y^2} \geq 0$ för $(x,y) \in D = \left\{(x,y) : 0 < x^2+y^2 \leq 1\right\}$.

a) Kroppen $K = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, \ 0 \leq z \leq f(x,y)\}$ har volymen

$$m(K) = \iint_D \left(-\ln\sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy = [\text{generaliserad i } 0] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \left(-\ln\sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy \text{ där } D_n = \left\{(x,y) : \tfrac{1}{n^2} \leq x^2+y^2 \leq 1\right\}:$$

$$I_n = [\text{polära koordinater}] = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{1} (-\ln r)\, r dr d\varphi = [\text{part. int.}] =$$

$$= 2\pi \left[-\frac{r^2}{2}\ln r + \frac{r^2}{4}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} \implies \underline{m(K)} = \lim_{n\to\infty} I_n = \underline{2\pi\left(\tfrac{1}{4} - 0\right)} \text{ ty } \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0.$$

b) Ytan $Y = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, \ z = f(x,y)\}$ har arean

$$m(Y) = \iint_D \sqrt{1 + \left(f'_x(x,y)\right)^2 + \left(f'_y(x,y)\right)^2} dxdy = [\text{generaliserad i } 0] =$$

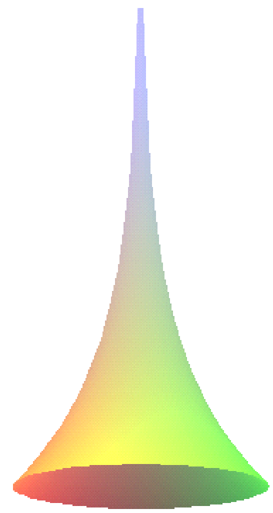
$= \lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2} dxdy$, D_n som ovan:

$A_n =$ [polära koordinater] $= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1} \sqrt{1 + \frac{1}{r^2}} r dr d\varphi = 2\pi \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1} \sqrt{r^2+1} dr =$

[part. int.] $= 2\pi \left[\frac{1}{2}\left(r\sqrt{r^2+1} + \ln\left(r + \sqrt{r^2+1}\right)\right)\right]_{\frac{1}{n}}^{1}$

$\big[$alternativt fås $\int \sqrt{r^2+1} dr = [r = \sinh t] = \int \cosh^2 t dt = \int \frac{1+\cosh 2t}{2} dt =$
$= \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sinh 2t = \frac{1}{2}(t + \sinh t \cosh t) = \frac{1}{2}\left(\ln\left(r + \sqrt{r^2+1}\right) + r\sqrt{r^2+1}\right)\big]$,

alltså $\underline{m(Y)} = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \underline{\pi\left(\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - 0\right)}$ ty $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.



$\boxed{\textbf{svar: a) } \frac{\pi}{2} \qquad \textbf{b) } \pi\left(\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)}$