Övningstenta i flervariabelanalys F1 (mve035), 07-02-17

uppg. 1

$f\left(x,y\right)=x+y+\sqrt{3-x^2-y^2}\Rightarrow \mathrm{grad} f\left(x,y\right)=\left(1-\frac{x}{\sqrt{3-x^2-y^2}},1-\frac{y}{\sqrt{3-x^2-y^2}}\right)$
$\Rightarrow \underline{\mathrm{grad} f\left(-1,-1\right)=\left(2,2\right)}$.

a) Tangentplanet har ekvationen
$z=f\left(-1,-1\right)+f'_x\left(-1,-1\right)\left(x+1\right)+f'_y\left(-1,-1\right)\left(y+1\right)=$
$=-1+2x+2+2y+2$ dvs. $\underline{2x+2y-z+3=0}$.

b) Observera att D_f är cirkelskivan $x^2+y^2\leq 3$, f är C^1 i inre punkter i D_f.

$$\left\{\begin{array}{l} f'_x=1-\frac{x}{\sqrt{3-x^2-y^2}}=0 \\ f'_y=1-\frac{y}{\sqrt{3-x^2-y^2}}=0 \end{array}\right. \iff x=y=\sqrt{3-x^2-y^2}, \text{ det ger } x\geq 0 \text{ och}$$

$x^2=3-2x^2$, enda stationära punkten är alltså $(1,1)$. Karaktären:

$$\left.\begin{array}{l} f''_{xx}=-\frac{\sqrt{3-x^2-y^2}+\frac{x^2}{\sqrt{3-x^2-y^2}}}{3-x^2-y^2}=\frac{y^2-3}{\left(3-x^2-y^2\right)\sqrt{3-x^2-y^2}} \\ f''_{yy}=-\frac{\sqrt{3-x^2-y^2}+\frac{y^2}{\sqrt{3-x^2-y^2}}}{3-x^2-y^2}=\frac{x^2-3}{\left(3-x^2-y^2\right)\sqrt{3-x^2-y^2}} \\ f''_{xy}=\frac{-xy}{\left(3-x^2-y^2\right)\sqrt{3-x^2-y^2}} \end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} f''_{xx}\left(1,1\right)=-2 \\ f''_{yy}\left(1,1\right)=-2 \\ f''_{xy}\left(1,1\right)=-1 \end{array}\right., \text{ den kvadratiska formen}$$

$Q\left(h,k\right)=f''_{xx}\left(1,1\right)h^2+2f''_{xy}\left(1,1\right)hk+f''_{xy}\left(1,1\right)k^2=$
$=-2\left(h^2+hk+k^2\right)=-2\left(\left(h+\frac{k}{2}\right)^2+\frac{3}{4}k^2\right)$ är negativt definit,
punkten $(1,1)$ är alltså en sträng lokal maximipunkt.
ANM: Man kan också beräkna största/minsta värde som f antar på den kompakta mängden D_f (det tillkommer undersökningnen av randen $x^2+y^2=3$): man får att f antar i $(1,1)$ sitt största värde ($f(1,1)=3$).

svar: a) $2x+2y-z=-3$ **b)** $(1,1)$ sträng lokal maximipunkt

uppg. 2

a) $\left\{\begin{array}{l} u=y+\cosh x \\ v=y-\sinh x \end{array}\right.$, $\frac{d\left(u,v\right)}{d\left(x,y\right)}=\left|\begin{array}{cc} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{array}\right|=\left|\begin{array}{cc} \sinh x & 1 \\ -\cosh x & 1 \end{array}\right|=$
$=\sinh x+\cosh x=e^x>0$ för alla $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Eftersom u, v är C^1 i $\mathbb{R}^2$ så ger inversa funktionssatsen att tillordningen $(x,y)\mapsto(u,v)$ är lokalt bijektiv i varje punkt i $\mathbb{R}^2$.

b) Kedjeregeln ger

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = \sinh x f'_u - \cosh x f'_v \\ f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = f'_u + f'_v \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$f'_x + \cosh x f'_y = (\sinh x + \cosh x)\, f'_u = e^x f'_u \overset{!}{=} e^x \Rightarrow f'_u = 1 \Rightarrow$
$f(u,v) = u + g(u,v) \Rightarrow f(x,y) = y + \cosh x + g(y - \sinh x) \Rightarrow$
$f(x, 2\sinh x) = 2\sinh x + \cosh x + g(\sinh x) \overset{!}{=} \cosh x \Rightarrow$
$g(t) = -2t \Rightarrow f(x,y) = y + \cosh x - 2(y - \sinh x) = \underline{2\sinh x + \cosh x - y}.$

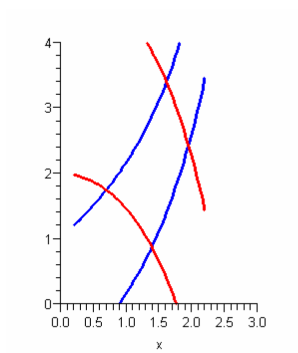
c) Området D beskrives av $3 \le y + \cosh x \le 6$, $-1 \le y - \sinh x \le 1$, i variablerna u och v är det $D' : 3 \le u \le 6$, $-1 \le v \le 1$, arean är alltså

$$\iint_D dxdy = \iint_{D'} \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = \left[\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{\frac{d(u,v)}{d(x,y)}} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{u-v} > 0\right] =$$

$$= \int_3^6 \int_{-1}^1 \frac{1}{u-v} dvdu = \int_3^6 \left[-\ln(u-v)\right]_{v=-1}^{v=1} du = \int_3^6 (\ln(u+1) - \ln(u-1))\, du =$$

[p.i]$= \left[(u+1)\ln(u+1) - (u-1)\ln(u-1)\right]_3^6 = 7\ln 7 - 5\ln 5 - 4\ln 4 + 2\ln 2.$

svar: **b)** $f(x,y) = 2\sinh x + \cosh x - y$ **c)** $7\ln 7 - 5\ln 5 - 6\ln 2$



uppg. 3

$f(0,y) = 0$ och $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ för $x \ne 0$;
för $\boldsymbol{v} = (\alpha, \beta)$ med $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ gäller:
om $\alpha \ne 0$: $f'_{\boldsymbol{v}}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t\alpha, t\beta) - f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t^3\alpha\beta^2}{t(t^2\alpha^2 + t^4\beta^4)} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2 + t^2\beta^4} = \frac{\beta^2}{\alpha}$,
om $\alpha = 0$: $f'_{\boldsymbol{v}}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(0,t\beta) - f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$ ($\beta = \pm 1$ då), alltså existerar riktningsderivatan i origo i varje riktning. Vi ser även att $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$ ($\boldsymbol{v} = (1,0)$ resp. $\boldsymbol{v} = (0,1)$), det ger $\operatorname{grad} f(0,0) \bullet \boldsymbol{v} = 0$, men $f'_{\boldsymbol{v}}(0,0) \ne \operatorname{grad} f(0,0) \bullet \boldsymbol{v}$ för t.ex. $\boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ och det ger att f inte är differentierbar i origo; detta följer även av att f inte är kontinuerlig i origo: t.ex. $f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} \ne f(0,0)$ då $y \to 0$.

svar: $f'_{\boldsymbol{v}}(0,0) = \operatorname{grad} f(0,0) \bullet \boldsymbol{v}$ gäller inte; f är inte differentierbar i $(0,0)$